МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

Вариант 9

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB = CD$. Найдите AB, если $BC = 12$, $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

Вариант 10

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB = CD$. Найдите AB, если $BC = 6$, $\cos(2\angle CAN) = -\frac{3}{4}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

   - он сидит на первой парте в ряду,
   - ближайшая парта перед ним пуста,
   - за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

   Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

Вариант 15

1. [3 балла] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x^2 - (4a + 8)x + a^2 + 4a = 0$ имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 5 раз?

2. [5 баллов] Дан треугольник ABC такой, что $AB = 30$, $BC = 24$, $AC = 18$. На стороне BC отмечено последовательно 23 точки: $B_1, B_2, \ldots, B_{23}$ так, что эти точки разбивают BC на 24 единичных отрезка. Аналогично, на стороне AC отмечено последовательно 17 точек: $A_1, A_2, \ldots, A_{17}$ так, что эти точки разбивают AC на 18 единичных отрезков. Сколько существует треугольников с площадью 11 и вершинами, которые выбираются из точек A, $A_1, A_2, \ldots, A_{17}$, B, $B_1, B_2, \ldots, B_{23}$, C?

3. [4 балла] AH – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Точка M – середина стороны AB. Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника ABC, если $AH = MK$, и $AK = 5$.

4. [4 балла] Из множества M, состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 240$.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC площади 80 вписан в окружность с центром O, а AA_1, BB_1 и CC_1 – его высоты. Найдите площадь треугольника BOA_1, если площади треугольников COB_1 и AOC_1 равны 12 и 20 соответственно.

6. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4, \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск q ($q \in \mathbb{N}$) приборов в месяц потребует на первом заводе $2q^2$ тыс.руб., на втором заводе $2q^2 + 2q$ тыс.руб., и на третьем $2q^2 - q$ тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 100 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 250 приборов?

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

Вариант 16

1. [3 балла] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x^2 - (4a - 12)x + a^2 - 6a = 0$ имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 3 раза?

2. [5 баллов] Дан треугольник ABC такой, что $AB = 35$, $BC = 28$, $AC = 21$. На стороне BC отмечено последовательно 27 точек: $B_1, B_2, \ldots, B_{27}$ так, что эти точки разбивают BC на 28 единичных отрезка. Аналогично, на стороне AC отмечено последовательно 20 точек: $A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ так, что эти точки разбивают AC на 21 единичный отрезок. Сколько существует треугольников с площадью 13 и вершинами, которые выбираются из точек $A, A_1, A_2, \ldots, A_{20}, B, B_1, B_2, \ldots, B_{27}, C$?

3. [4 балла] AH – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$). Точка M – середина стороны AB. Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника ABC, если $AH = MK$, и $AK = 7$.

4. [4 балла] Из множества M, состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 288$.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC площади 120 вписан в окружность с центром O, а AA_1, BB_1 и CC_1 – его высоты. Найдите площадь треугольника BOA_1, если площади треугольников COB_1 и AOC_1 равны 12 и 36 соответственно.

6. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} + ab = 8, \\ \frac{b^3}{a} + 3ab = 16. \end{cases}$$

7. [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск q ($q \in \mathbb{N}$) приборов в месяц потребует на первом заводе $3q^2 + 2q$ тыс.руб., на втором заводе $3q^2 - q$ тыс.руб., и на третьем $3q^2$ тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 80 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 200 приборов?