10 КЛАСС. Вариант 11

1. [4 балла] Решите неравенство $|x^3+4|+|x^2-1| \leqslant |x^3-x^2+5|$.

   Ответ: $x \in \left(-\infty; -\sqrt[3]{4}\,\right] \cup [-1;1]$.

   Решение. Заметим, что разность выражений под модулями в левой части неравенства равна выражению под модулем в правой части. Поэтому имеет смысл замена $u=x^3+4$, $v=x^2-1$. В результате неравенство принимает вид $|u|+|v| \leqslant |u-v|$. Так как обе его части неотрицательны, возведение обеих частей в квадрат является равносильным преобразованием. В итоге имеем $u^2+2|uv|+v^2 \leqslant u^2-2uv+v^2 \Leftrightarrow |uv| \leqslant -uv \Leftrightarrow uv \leqslant 0$. Значит, исходное неравенство равносильно следующему: $(x^3+4)(x^2-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow \left(x+\sqrt[3]{4}\right)(x+1)(x-1) \leqslant 0$. Решая это неравенство методом интервалов, находим $x \in \left(-\infty; -\sqrt[3]{4}\,\right] \cup [-1;1]$.

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150}\cdot 3^{300}$?

   Ответ: 20 301.

   Решение. Пусть $a=2^{x_1}3^{y_1}$, $b=2^{x_2}3^{y_2}$, $c=2^{x_3}3^{y_3}$, где x_i, y_i – целые неотрицательные числа. Тогда $x_1+x_2+x_3=150$ и $y_1+y_2+y_3=300$. Числа a, b, c составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2=ac$, откуда $2x_2=x_1+x_3$ и $2y_2=y_1+y_3$. Из полученных уравнений $x_2=50$, $y_2=100$, $x_1+x_3=100$, $y_1+y_3=200$. Посчитаем количество решений этой системы. Есть 101 способ выбрать пару чисел $(x_1;x_3)$ – действительно, x_1 можно взять любым целым числом из отрезка $[0;100]$, после чего x_3 определяется однозначно. Аналогично, пару $(y_1;y_3)$ можно выбрать 201 способом. Перемножая, получаем $101\cdot 201=20\,301$ способ.

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению $x^2(y-2)-x(13y-27)+44y-94=0$.

   Ответ: $(6;2)$.

   Решение. Перепишем уравнение в виде $y\left(x^2-13x+44\right)=2x^2-27x+94$. Коэффициент при y в левой части уравнения – это квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом, поэтому он не обращается в ноль ни при каких значения x, а значит, уравнение равносильно следующему:

$$y=\frac{2x^2-27x+94}{x^2-13x+44} \Leftrightarrow y=\frac{2\left(x^2-13x+44\right)-x+6}{x^2-13x+44} \Leftrightarrow y=2-\frac{x-6}{x^2-13x+44}.$$

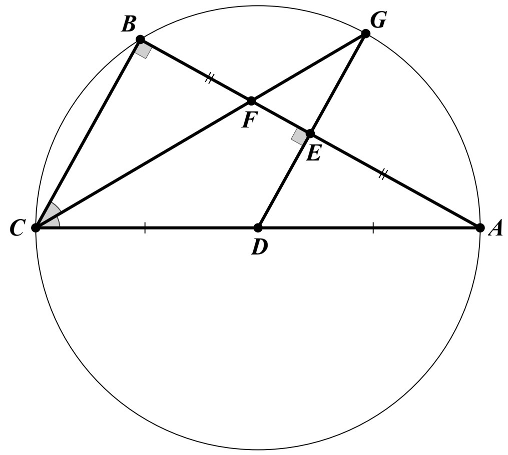
   Так как дробь в правой части последнего уравнения должна быть целым числом, то возможны следующие два варианта:
   1) дробь равна нулю – тогда её числитель равен нулю и получаем решение $x=6$, $y=2$;
   2) дробь равна целому числу, отличному от нуля – тогда её числитель по модулю не меньше знаменателя, откуда получаем

$$|x-6| \geqslant \left|x^2-13x+44\right| \Leftrightarrow (x-6)^2 \geqslant \left(x^2-13x+44\right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2-12x+38\right)\left(x^2-14x+50\right) \leqslant 0.$$

   Последнее неравенство не имеет решений, и этот случай невозможен.

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF.

   Ответ: $\angle B=\frac{\pi}{2}$, $\angle C=\arccos\frac{2}{3}$, $\angle A=\arcsin\frac{2}{3}$.



Решение. CG – биссектриса угла ACB, поэтому дуги AG и GB равны (на них опираются равные вписанные углы), поэтому равны одноимённые им хорды. Значит, треугольник AGB равнобедренный, и его медиана GD является также и высотой. DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE \parallel BC$ и $\angle ABC = \angle ADE =$ как накрест лежащие. Значит, $\angle ABC = 90°$. Треугольники BCF и DGF подобны по двум углам, а площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF, поэтому коэффициент подобия равен $\sqrt{16} = 4$ и $BF = 4DF$. Далее находим, что $AD = BD = BF + DF = 5BF$, $AF = AD + DF = 6DF$, и по свойству биссектрисы $\frac{BC}{AC} = \frac{BF}{AF} = \frac{4DF}{6DF} = \frac{2}{3}$. С другой стороны $\frac{BC}{AC} = \cos\angle ACB = \sin\angle BAC$. Следовательно, $\angle ACB = \arccos\frac{2}{3}$, $\angle BAC = \arcsin\frac{2}{3}$.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

Ответ: $a = -\frac{73}{24}$, $b = \sqrt[4]{\frac{50}{3}}$.

Решение. Пусть A и B – вершины квадрата, лежащие в первой и четвёртой четвертях соответственно; O – начало координат.
По условию, точка B лежит на прямой $y = -3x$. Если x_0 – абсцисса точки B, то $x_0 > 0$, а координаты точки B – это $(x_0; -3x_0)$. Так как точка A получается из B поворотом на $90°$ против часовой стрелки, то её координаты есть $(3x_0; x_0)$. Поскольку обе точки лежат на графике $y = x^5 + ax$, получаем и решаем систему уравнений (учитываем, что $x_0 \neq 0$)

$$\begin{cases} -3x_0 = x_0^5 + ax_0, \\ x_0 = 243x_0^5 + 3ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x_0^4 - 3, \\ 3a = 1 - 243x_0^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x_0^4 - 3, \\ -3x_0^4 - 9 = 1 - 243x_0^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^4 = \frac{1}{24}, \\ a = -\frac{73}{24}. \end{cases}$$

Пусть $OA = d$ – половина диагонали квадрата. Тогда $OA^2 = (3x_0)^2 + x_0^2 = 10x_0^2$, а сторона квадрата b равна $d\sqrt{2}$, т.е. $b = \sqrt{10} \cdot x_0 \cdot \sqrt{2} = \sqrt[4]{\frac{50}{3}}$.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом $a + \frac{5}{b} = b + \frac{5}{c} = c + \frac{5}{a}$. Найдите минимально возможное значение произведения abc.

Ответ: $-5\sqrt{5}$.

Решение. Перепишем исходную цепочку равенств в виде системы уравнений

$$\begin{cases} a - b = \frac{5}{c} - \frac{5}{b}, \\ b - c = \frac{5}{a} - \frac{5}{c}, \\ c - a = \frac{5}{b} - \frac{5}{a}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = \frac{5(b-c)}{bc}, \\ b - c = \frac{5(c-a)}{ac}, \\ c - a = \frac{5(a-b)}{ab}. \end{cases}$$

Заметим, что числа a, b, c попарно различны. Действительно, если, к примеру, $c = a$, то третье уравнение системы принимает вид $0 = \frac{5(a-b)}{ab}$, поэтому $a = b$ и все три числа совпадают, что противоречит условию. Перемножая все уравнения этой системы, имеем $(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{125(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2b^2c^2}$. Так как числа попарно различны, то $(abc)^2 = 125$, то есть $abc = \pm 5\sqrt{5}$.
Покажем, что у исходной системы существует решение $(a_0; b_0; c_0)$ такое, что $a_0b_0c_0 = -5\sqrt{5}$. (Строго говоря, выше мы получили, что если система имеет решения, то для этих решений

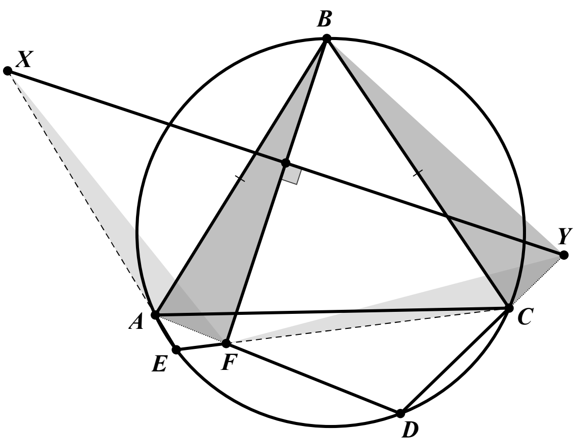
либо $abc = 5\sqrt{5}$, либо $abc = -5\sqrt{5}$. Может оказаться так, что у системы решений нет вовсе или так, что для любого решения системы произведение abc равно $5\sqrt{5}$.)
Возьмём, например, $b_0 = -\sqrt{5}$ и оставим только первые два уравнения системы (третье уравнение является их следствием). Она принимает вид

$$\begin{cases} a + \sqrt{5} = \frac{5}{c} + \sqrt{5}, \\ -\sqrt{5} - c = \frac{5}{a} - \frac{5}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{c}, \\ 2c^2 + c\sqrt{5} - 5 = 0. \end{cases}$$

У этой системы есть решение $c_0 = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $a_0 = 2\sqrt{5}$. Итак, для тройки чисел $\left(2\sqrt{5}; -\sqrt{5}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ выражение abc достигает минимального значения $-5\sqrt{5}$.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 17$, $XY = 31$.

Ответ: $\frac{527}{2}$.



Решение. Углы EAD и ECD равны как вписанные в окружность и опирающиеся на одну дугу. Значит, смежные с ними углы XAF и YCF также равны. А так как $AX = CF$, $AF = CY$, то треугольники AXF и FCY равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $XF = YF$, т.е. точка F равноудалена от концов отрезка XY, следовательно, точка F лежит на серединном перпендикуляре к нему.
Четырёхугольник $BADC$ вписан в окружность, поэтому сумма его противоположных углов равна $180°$. Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BCD = 180° - \alpha$, $\angle BCY = 180° - \angle BCD = \alpha$. Но тогда треугольники AFB и CYB также равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, $BY = BF$. Аналогично доказывается равенство $\triangle BAX = \triangle BCF$, откуда $BX = BF$, поэтому $BX = BY$. Значит, точка B также лежит на серединном перпендикуляре к XY. Следовательно, $BF \perp XY$, а площадь четырёхугольника $BXFY$ равна $\frac{BF \cdot XY}{2} = \frac{527}{2}$.

10 КЛАСС. Вариант 12

1. [4 балла] Решите неравенство $|x^3-9|+|x^2-1| \leqslant |x^3-x^2-8|$.

   Ответ: $x \in (-\infty;-1] \cup \left[1;\sqrt[3]{9}\right]$.

   Решение. Заметим, что разность выражений под модулями в левой части неравенства равна выражению под модулем в правой части. Поэтому имеет смысл замена $u=x^3-9$, $v=x^2-1$. В результате неравенство принимает вид $|u|+|v| \leqslant |u-v|$. Так как обе его части неотрицательны, возведение обеих частей в квадрат является равносильным преобразованием. В итоге имеем $u^2+2|uv|+v^2 \leqslant u^2-2uv+v^2 \Leftrightarrow |uv| \leqslant -uv \Leftrightarrow uv \leqslant 0$. Значит, исходное неравенство равносильно следующему: $(x^3-9)(x^2-1) \leqslant 0 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt[3]{9}\right)(x+1)(x-1) \leqslant 0$. Решая это неравенство методом интервалов, находим $x \in (-\infty;-1) \cup \left[1;\sqrt[3]{9}\right]$.

2. [4 балла] Сколько существует троек натуральных чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $5^{360}\cdot 7^{90}$?

   Ответ: 14 701.

   Решение. Пусть $a=5^{x_1}7^{y_1}$, $b=5^{x_2}7^{y_2}$, $c=5^{x_3}7^{y_3}$, где x_i, y_i – целые неотрицательные числа. Тогда $x_1+x_2+x_3=360$ и $y_1+y_2+y_3=90$. Числа a, b, c составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2=ac$, откуда $2x_2=x_1+x_3$ и $2y_2=y_1+y_3$. Из полученных уравнений $x_2=120$, $y_2=30$, $x_1+x_3=240$, $y_1+y_3=60$. Посчитаем количество решений этой системы. Есть 241 способ выбрать пару чисел $(x_1;x_3)$ – действительно, x_1 можно взять любым целым числом из отрезка $[0;240]$, после чего x_3 определяется однозначно. Аналогично, пару $(y_1;y_3)$ можно выбрать 61 способом. Перемножая, получаем $241\cdot 61=14\,701$ способ.

3. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению
   $x^2(y-3)-x(11y-34)+32y-101=0$.

   Ответ: $(5;3)$.

   Решение. Перепишем уравнение в виде $y\left(x^2-11x+32\right)=3x^2-34x+101$. Коэффициент при y в левой части уравнения – это квадратный трёхчлен с отрицательным дискриминантом, поэтому он не обращается в ноль ни при каких значения x, а значит, уравнение равносильно следующему:

$$y=\frac{3x^2-34x+101}{x^2-11x+32} \Leftrightarrow y=\frac{3\left(x^2-11x+32\right)-x+5}{x^2-11x+32} \Leftrightarrow y=3-\frac{x-5}{x^2-11x+32}.$$

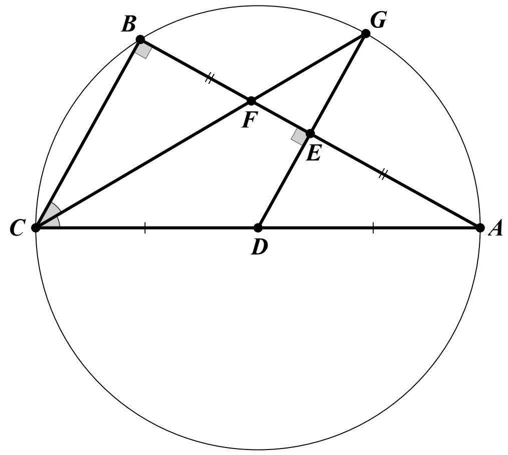
   Так как дробь в правой части последнего уравнения должна быть целым числом, то возможны следующие два варианта:
   1) дробь равна нулю – тогда её числитель равен нулю и получаем решение $x=5$, $y=3$;
   2) дробь равна целому числу, отличному от нуля – тогда её числитель по модулю не меньше знаменателя, откуда получаем

$$|x-5| \geqslant \left|x^2-11x+32\right| \Leftrightarrow (x-5)^2 \geqslant \left(x^2-11x+32\right)^2 \Leftrightarrow \left(x^2-12x+37\right)\left(x^2-10x+27\right) \leqslant 0.$$

   Последнее неравенство не имеет решений, и этот случай невозможен.

4. [5 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AB и AC соответственно, CF – биссектриса угла C треугольника ABC. Прямые ED и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BCF в 25 раз больше площади треугольника DGF.

   Ответ: $\angle B=\frac{\pi}{2}$, $\angle C=\arccos\frac{5}{7}$, $\angle A=\arcsin\frac{5}{7}$.



Решение. CG – биссектриса угла ACB, поэтому дуги AG и GB равны (на них опираются равные вписанные углы), поэтому равны одноимённые им хорды. Значит, треугольник AGB равнобедренный, и его медиана GD является также и высотой. DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE \parallel BC$ и $\angle ABC = \angle ADE$ = как накрест лежащие. Значит, $\angle ABC = 90°$. Треугольники BCF и DGF подобны по двум углам, а площадь треугольника BCF в 16 раз больше площади треугольника DGF, поэтому коэффициент подобия равен $\sqrt{25} = 4$ и $BF = 5DF$. Далее находим, что $AD = BD = BF + DF = 6BF$, $AF = AD + DF = 7DF$, и по свойству биссектрисы $\frac{BC}{AC} = \frac{BF}{AF} = \frac{5DF}{7DF} = \frac{5}{7}$. С другой стороны $\frac{BC}{AC} = \cos\angle ACB = \sin\angle BAC$. Следовательно, $\angle ACB = \arccos\frac{5}{7}$, $\angle BAC = \arcsin\frac{5}{7}$.

5. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -x^5 + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 2x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и сторону квадрата.

Ответ: $a = \frac{13}{6}$, $b = \sqrt[4]{\frac{50}{3}}$.

Решение. Пусть A и B – вершины квадрата, лежащие в первой и четвёртой четвертях соответственно; O – начало координат.
По условию, точка A лежит на прямой $y = 2x$. Если x_0 – абсцисса точки A, то $x_0 > 0$, а координаты точки A – это $(x_0; 2x_0)$. Так как точка B получается из A поворотом на $90°$ по часовой стрелке, то её координаты есть $(2x_0; -x_0)$. Поскольку обе точки лежат на графике $y = -x^5 + ax$, получаем и решаем систему уравнений (учитываем, что $x_0 \neq 0$)

$$\begin{cases} 2x_0 = -x_0^5 + ax_0, \\ -x_0 = -32x_0^5 + 2ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x_0^4 + 2, \\ 2a = 32x_0^4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x_0^4 + 2, \\ 2x_0^4 + 4 = 32x_0^4 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^4 = \frac{1}{6}, \\ a = \frac{13}{6}. \end{cases}$$

Пусть $OA = d$ – половина диагонали квадрата. Тогда $OA^2 = (2x_0)^2 + x_0^2 = 5x_0^2$, а сторона квадрата b равна $d\sqrt{2}$, т.е. $b = \sqrt{5}\cdot x_0 \cdot \sqrt{2} = \sqrt[4]{\frac{50}{3}}$.

6. [5 баллов] Числа a, b и c не все равны между собой, и при этом $a + \frac{7}{b} = b + \frac{7}{c} = c + \frac{7}{a}$. Найдите максимально возможное значение произведения abc.

Ответ: $7\sqrt{7}$.

Решение. Перепишем исходную цепочку равенств в виде системы уравнений

$$\begin{cases} a - b = \frac{7}{c} - \frac{7}{b}, \\ b - c = \frac{7}{a} - \frac{7}{c}, \\ c - a = \frac{7}{b} - \frac{7}{a}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b = \frac{7(b-c)}{bc}, \\ b - c = \frac{7(c-a)}{ac}, \\ c - a = \frac{7(a-b)}{ab}. \end{cases}$$

Заметим, что числа a, b, c попарно различны. Действительно, если, к примеру, $c = a$, то третье уравнение системы принимает вид $0 = \frac{7(a-b)}{ab}$, поэтому $a = b$ и все три числа совпадают, что противоречит условию. Перемножая все уравнения этой системы, имеем $(a-b)(b-c)(c-a) = \frac{343(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2b^2c^2}$. Так как числа попарно различны, то $(abc)^2 = 343$, то есть $abc = \pm 7\sqrt{7}$.
Покажем, что у исходной системы существует решение $(a_0; b_0; c_0)$ такое, что $a_0b_0c_0 = 7\sqrt{7}$. (Строго говоря, выше мы получили, что если система имеет решения, то для этих решений

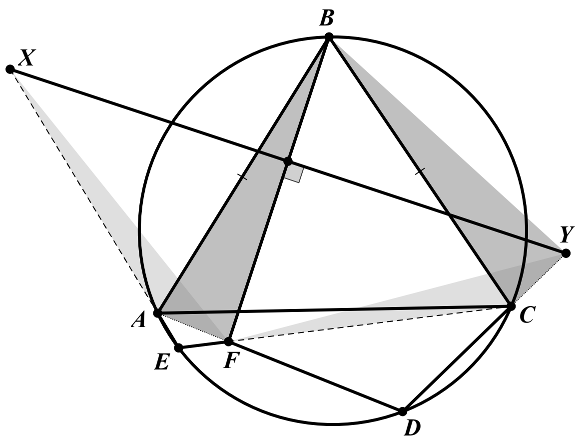
либо $abc = 7\sqrt{7}$, либо $abc = -7\sqrt{7}$. Может оказаться так, что у системы решений нет вовсе или так, что для любого решения системы произведение abc равно $-7\sqrt{7}$.)
Возьмём, например, $b_0 = \sqrt{7}$ и оставим только первые два уравнения системы (третье уравнение является их следствием). Она принимает вид

$$\begin{cases} a - \sqrt{7} = \frac{7}{c} - \sqrt{7}, \\ \sqrt{7} - c = \frac{7}{a} - \frac{7}{c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{c}, \\ 2c^2 - c\sqrt{7} - 7 = 0. \end{cases}$$

У этой системы есть решение $c_0 = -\frac{\sqrt{7}}{2}$, $a_0 = -2\sqrt{7}$. Итак, для тройки чисел $\left(-2\sqrt{7}; \sqrt{7}; -\frac{\sqrt{7}}{2}\right)$ выражение abc достигает максимального значения $7\sqrt{7}$.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 19$, $XY = 36$.

Ответ: 342.



Решение. Углы EAD и ECD равны как вписанные в окружность и опирающиеся на одну дугу. Значит, смежные с ними углы XAF и YCF также равны. А так как $AX = CF$, $AF = CY$, то треугольники AXF и FCY равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $XF = YF$, т.е. точка F равноудалена от концов отрезка XY, следовательно, точка F лежит на серединном перпендикуляре к нему.
Четырёхугольник $BADC$ вписан в окружность, поэтому сумма его противоположных углов равна $180°$. Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BCD = 180° - \alpha$, $\angle BCY = 180° - \angle BCD = \alpha$. Но тогда треугольники AFB и CYB также равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, $BY = BF$. Аналогично доказывается равенство $\triangle BAX = \triangle BCF$, откуда $BX = BF$, поэтому $BX = BY$. Значит, точка B также лежит на серединном перпендикуляре к XY. Следовательно, $BF \perp XY$, а площадь четырёхугольника $BXFY$ равна $\frac{BF \cdot XY}{2} = 342$.

