9 КЛАСС. Вариант 13

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{11}7^{11}$, bc делится на $3^{18}7^{16}$, ac делится на $3^{21}7^{38}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

   Ответ: $3^{25}7^{38}$.

   Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делителей, отличных от 3 и 7. Пусть $a = 3^{\alpha_1}7^{\beta_1}$, $b = 3^{\alpha_2}7^{\beta_2}$, $c = 3^{\alpha_3}7^{\beta_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Рассмотрим отдельно делимость на 3 и 7.
   1) Из того, что ab делится на 3^{11}, следует, что $\alpha_1+\alpha_2 \geqslant 9$. Аналогично, $\alpha_2+\alpha_3 \geqslant 18$ и $\alpha_1+\alpha_3 \geqslant 21$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geqslant \frac{11+18+21}{2} = 25$. Покажем, что значение $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 25$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 14$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1 + \alpha_2 = 9$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 18$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 21$).
   2) Из того, что ac делится на 7^{38} следует, что $\beta_1+\beta_3 \geqslant 38$. Заметим, что $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant \beta_1+\beta_3 \geqslant 38$. $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ может равняться 38, если, например, $\beta_1 = 19$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 19$.
   Так как минимум каждой из сумм $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ не зависит от другого, то и минимальное значение abc равно
   $$3^{\min(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}7^{\min(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} = 3^{25}7^{38}.$$

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь $\frac{a+b}{a^2-8ab+b^2}$. При каком наибольшем m могло оказаться, что дробь сократима на m?

   Ответ. 10.

   Решение. Пусть $d = \text{НОД}\,(a^2 - 8ab + b^2; a + b)$. Так как $a^2 - 8ab + b^2 = a(a + b) - 9ab + b^2 = a(a + b) - 9b(a + b) + 10b^2$, т.е. $10b^2 = (a^2 - 8ab + b^2) + (9b - a)(a + b)$, из этого равенства следует, что $10b^2$ делится нацело на d. Аналогично доказывается что $10a^2$ делится нацело на d. Поэтому $d \leqslant \text{НОД}\,(10b^2; 10a^2) = 10 \cdot \text{НОД}\,(a^2; b^2) \leqslant 10$, так как числа a и b взаимно просты и $\text{НОД}(a; b) = 1$. Докажем, что значение $d = 10$ может достигаться. Для этого достаточно взять $a = 19$, $b = 1$ – при этом дробь равна $\frac{20}{210} = \frac{2}{21}$.

3. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} - \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - 4x$.

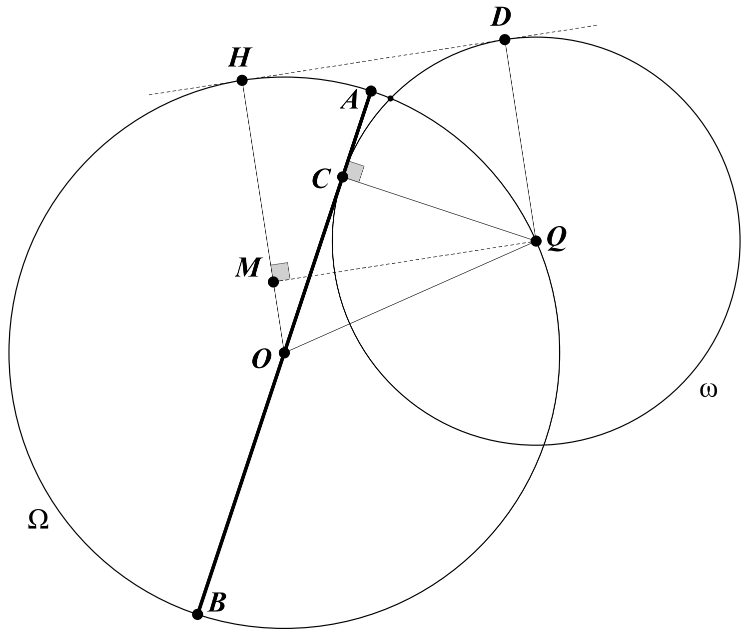
   Ответ: $x = \frac{1}{4}$.

   Решение. Заметим, что правая часть уравнения есть разность подкоренных выражений в левой части уравнения. Обозначим $u = \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$, $v = \sqrt{2x^2 + x + 3}$. Тогда $1 - 4x = u^2 - v^2$, и уравнение принимает вид
   $$u - v = u^2 - v^2 \Leftrightarrow (u - v)(1 - u - v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v, \\ u + v = 1. \end{array}\right.$$
   Первое уравнение имеет одно решение $x = \frac{1}{4}$ (принадлежащее области допустимых значений). Покажем, что левая часть второго уравнения $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} + \sqrt{2x^2 + x + 3} = 1$ больше правой при всех допустимых значениях x (что означает, что у уравнения нет решений). Для этого достаточно доказать, что первое слагаемое больше единицы при всех x. Это несложно проверить: $\sqrt{2x^2 - 3x + 4} > 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 4 > 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 3 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Итак, уравнение имеет единственное решение $x = \frac{1}{4}$.

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω.

   Ответ: $\sqrt{52}$.

 © МФТИ, 2023



Решение. Обозначим центры окружности Ω и ω как O и Q, а их радиусы – как R и r соответственно. Из условия $R = \frac{AB}{2} = \frac{17}{2}$. Тогда $CO = R - AC = \frac{15}{2}$ и из треугольника OCQ находим $r = QC = \sqrt{OQ^2 - OC^2} = 4$.

Пусть DH – общая касательная к окружностям D и H – её точки касания с окружностями ω и Ω. В прямоугольной трапеции $OQDH$ известны основания $QD = r = 4$, $OH = R = \frac{17}{2}$ и боковая сторона $OQ = R = \frac{17}{2}$. Чтобы найти вторую боковую сторону DH, опускаем из точки Q перпендикуляр QM на основание OH. Так как $QDHM$ – прямоугольник, то его противоположные стороны равны. Значит, $DH = MQ = \sqrt{OQ^2 - OM^2} = \sqrt{OQ^2 - (OH - DQ)^2} = \sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{52}$.

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам $3x + 2y = z$ и $\frac{3}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{3x^2-4y^2-z^2}{x^2-6y^2}$.

Ответ: 4.

Решение. Перемножив равенства из условия, получаем $9 + \frac{3x}{y} + \frac{6y}{x} + 2 = 2$. Умножая обе части уравнения на xy и упрощая, имеем $x^2 + 3xy + 2y^2 = 0$. Решаем это уравнение как квадратное уравнение относительно одной из переменных, например, относительно x. Дискриминант равен $(3y)^2 - 4\left(2y^2\right)1 = y^2$, поэтому $x = \frac{-3y\pm y}{2}$ откуда $x = -2y$ или $x = -y$.

В первом случае $z = -4y$ и дробь, данная в условии, равна $\frac{12y^2-4y^2-16y^2}{4y^2-6y^2} = 4$, а во втором находим, что $z = -y$ и дробь принимает вид $\frac{3y^2-4y^2-y^2}{y^2-6y^2} = \frac{2}{5}$. Наибольшее значение дроби – это 4.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 2 часа раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B, а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 96 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 6 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 1 час 15 минут позже мотоциклиста. Найдите расстояние между A и B.

Ответ: 90 километров.

 © МФТИ, 2023

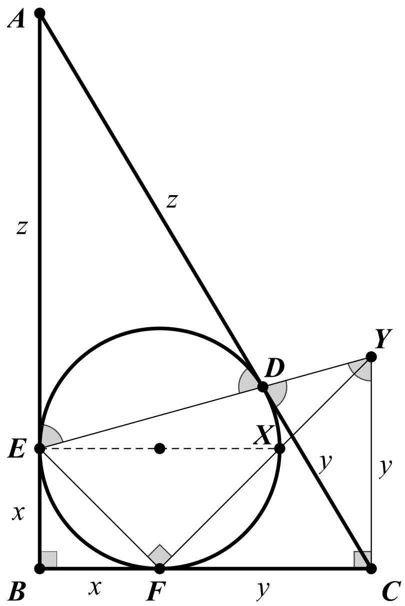
Решение. Пусть x – скорость мотоциклиста, y – скорость велосипедиста, а S – расстояние между A и B. По условию имеем

$$\begin{cases} \frac{S}{y} - \frac{S}{x} = 2, \\ \frac{Sx}{y} - \frac{Sy}{x} = 96, \\ \frac{S}{y+6} - \frac{S}{x+6} = \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S(x-y)}{xy} = 2, \\ \frac{S(x-y)}{(x+6)(y+6)} = \frac{5}{4}, \\ \frac{S\left(x^2-y^2\right)}{xy} = 96. \end{cases}$$

Разделив третье уравнение на первое, получаем равенство $x+y=48$, а разделив первое уравнение на второе – равенство $\frac{(x+6)(y+6)}{xy} = \frac{8}{5}$. Последнее уравнение может быть преобразовано так: $5(xy+6x+6y+36) = 8xy \Leftrightarrow xy - 10(x+y) - 60 = 0$. Так как $x+y=48$, отсюда следует, что $xy = 540$. Полученная система имеет два решения $(18;30)$ и $(30;18)$. Поскольку $x > y$ (мотоциклист приезжает раньше, следовательно, едет быстрее), подходит только второе решение. Тогда $S = \frac{2xy}{x-y} = 90$.

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC, проходящую через вершину C, в точке Y; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω. Известно, что $EX = 2\sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

Ответ: $\frac{10}{3}$.



Решение. Пусть $BE = BF = x$, $CF = CD = y$, $AD = AE = z$. Поскольку $CY \parallel AE$, то треугольники AED и CYD подобны по двум углам. Так как треугольник ADE равнобедренный, то и треугольник CDY равнобедренный, $CY = CD = y$. Тогда треугольник CYF – равнобедренный прямоугольный, как и треугольник BEF, $\angle YFC = \angle EFB = 45°$. Следовательно, треугольник EFX – равнобедренный прямоугольный с катетом $FX = x\sqrt{2}$ и гипотенузой $EX = 2x$. Далее, $XY = FY - FX = y\sqrt{2} - x\sqrt{2} = (y-x)\sqrt{2}$. По условию $EX = 2XY\sqrt{2} = 4(y-x)$. Итак, $2x = 4(y-x)$, откуда $y = \frac{3}{2}x$. По теореме Пифагора для треугольника ABC имеем $(x+y)^2 + (z+x)^2 = (y+z)^2$. Подставляя в это равенство $y = \frac{3}{2}x$, раскрывая скобки и приводя подобные члены, находим, что либо $x = 0$, что невозможно, либо $z = 5x$. Отсюда $\frac{z}{y} = \frac{5x}{3x/2} = \frac{10}{3}$.

 © МФТИ, 2023

9 КЛАСС. Вариант 14

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $3^{14}7^{13}$, bc делится на $3^{19}7^{17}$, ac делится на $3^{23}7^{42}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

Ответ: $3^{28}7^{42}$.

Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делителей, отличных от 3 и 7. Пусть $a = 3^{\alpha_1}7^{\beta_1}$, $b = 3^{\alpha_2}7^{\beta_2}$, $c = 3^{\alpha_3}7^{\beta_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Рассмотрим отдельно делимость на 3 и 7.
1) Из того, что ab делится на 3^{14}, следует, что $\alpha_1+\alpha_2 \geqslant 14$. Аналогично, $\alpha_2+\alpha_3 \geqslant 19$ и $\alpha_1+\alpha_3 \geqslant 23$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geqslant \frac{14+19+23}{2} = 28$. Покажем, что значение $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 28$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 9$, $\alpha_2 = 5$, $\alpha_3 = 14$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1+\alpha_2 = 14$, $\alpha_2+\alpha_3 = 19$, $\alpha_1+\alpha_3 = 23$).
2) Из того, что ac делится на 7^{42} следует, что $\beta_1+\beta_3 \geqslant 42$. Заметим, что $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant \beta_1+\beta_3 \geqslant 42$. $\beta_1+\beta_2+\beta_3$ может равняться 42, если, например, $\beta_1 = 19$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 23$.
Так как минимум каждой из сумм $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_1+\beta_2+\beta_3$ не зависит от другого, то и минимальное значение abc равно

$$3^{\min(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}7^{\min(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} = 3^{28}7^{42}.$$

2. [4 балла] Известно, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима ($a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$). На доске записана дробь $\frac{a+b}{a^2-9ab+b^2}$. При каком наибольшем m могло оказаться, что дробь сократима на m?

Ответ. 11.

Решение. Пусть $d = \text{НОД}\,(a^2-9ab+b^2; a+b)$. Так как $a^2-9ab+b^2 = a(a+b)-10ab+b^2 = a(a+b)-10b(a+b)+11b^2$, т.е. $11b^2 = (a^2-9ab+b^2)+(10b-a)(a+b)$, из этого равенства следует, что $11b^2$ делится нацело на d. Аналогично доказывается что $11a^2$ делится нацело на d. Поэтому $d \leqslant \text{НОД}\,(11b^2; 11a^2) = 11\cdot\text{НОД}\,(a^2; b^2) \leqslant 11$, так как числа a и b взаимно просты и $\text{НОД}(a; b) = 1$. Докажем, что значение $d = 11$ может достигаться. Для этого достаточно взять $a = 1$, $b = 10$ – при этом дробь равна $\frac{11}{11} = 1$.

3. [5 баллов] Решите уравнение $\sqrt{3x^2-5x+6} - \sqrt{3x^2+x+1} = 5-6x$.

Ответ. $x = \frac{5}{6}$.

Решение. Заметим, что правая часть уравнения есть разность подкоренных выражений в левой части уравнения. Обозначим $u = \sqrt{3x^2-5x+6}$, $v = \sqrt{3x^2+x+1}$. Тогда $5-6x = u^2-v^2$, и уравнение принимает вид

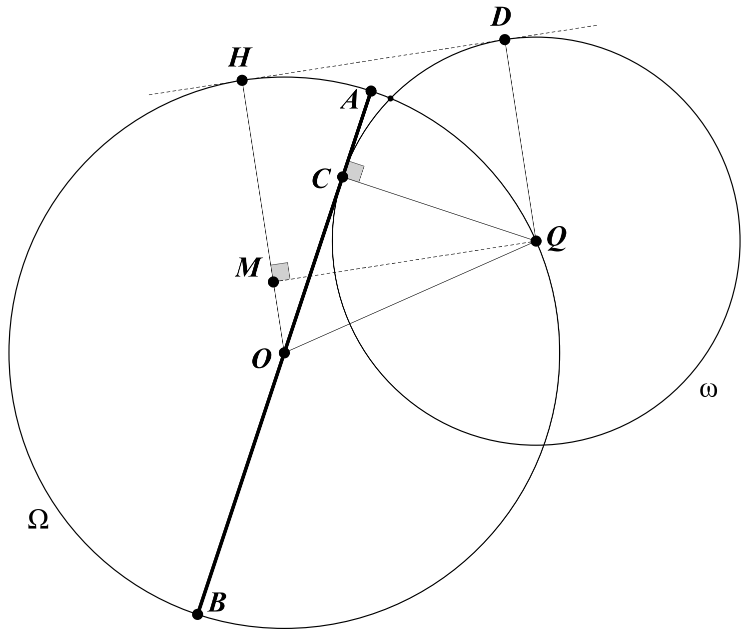
$$u-v = u^2-v^2 \Leftrightarrow (u-v)(1-u-v) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v, \\ u+v = 1. \end{array}\right.$$

Первое уравнение имеет одно решение $x = \frac{5}{6}$ (принадлежащее области допустимых значений). Покажем, что левая часть второго уравнения $\sqrt{3x^2-5x+6}+\sqrt{3x^2+x+1} = 1$ больше правой при всех допустимых значениях x (что означает, что у уравнения нет решений). Для этого достаточно доказать, что первое слагаемое больше единицы при всех x. Это несложно проверить: $\sqrt{3x^2-5x+6} > 1 \Leftrightarrow 3x^2-5x+6 > 1 \Leftrightarrow 3x^2-5x+5 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Итак, уравнение имеет единственное решение $x = \frac{5}{6}$.

4. [4 балла] Центр окружности ω лежит на окружности Ω, диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 25$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω.

Ответ: $\sqrt{105}$.

 © МФТИ, 2023



Решение. Обозначим центры окружности Ω и ω как O и Q, а их радиусы – как R и r соответственно. Из условия $R = \frac{AB}{2} = 13$. Тогда $CO = R - AC = 12$ и из треугольника OCQ находим $r = QC = \sqrt{OQ^2 - OC^2} = 5$.

Пусть DH – общая касательная к окружностям D и H – её точки касания с окружностями ω и Ω. В прямоугольной трапеции $OQDH$ известны основания $QD = r = 5$, $OH = R = 13$ и боковая сторона $OQ = R = 13$. Чтобы найти вторую боковую сторону DH, опускаем из точки Q перпендикуляр QM на основание OH. Так как $QDHM$ – прямоугольник, то его противоположные стороны равны. Значит, $DH = MQ = \sqrt{OQ^2 - OM^2} = \sqrt{OQ^2 - (OH - DQ)^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{105}$.

5. [4 балла] Ненулевые действительные числа x, y, z удовлетворяют равенствам $5x - y = 3z$ и $\frac{8}{x} + \frac{1}{y} = \frac{15}{z}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $\frac{25x^2 - y^2 - z^2}{y^2 + 3z^2}$.

Ответ: $\frac{55}{42}$.

Решение. Перемножив равенства из условия, получаем $40 + \frac{5x}{y} - \frac{8y}{x} - 1 = 45$. Умножая обе части уравнения на xy и приводя подобные слагаемые, имеем $5x^2 - 6xy - 8y^2 = 0$. Решаем это уравнение как квадратное уравнение относительно одной из переменных, например, относительно x. Дискриминант равен $(-6y)^2 - 4\left(-8y^2\right)5 = 196y^2$, поэтому $x = \frac{6y \pm 14y}{10}$ откуда $x = 2y$ или $x = -\frac{4y}{5}$.

В первом случае $z = 3y$ и дробь, данная в условии, равна $\frac{100y^2 - y^2 - 9y^2}{y^2 + 27y^2} = \frac{45}{14}$, а во втором находим, что $z = -\frac{5y}{3}$ и дробь принимает вид $\frac{16y^2 - y^2 - \frac{25y^2}{9}}{y^2 + \frac{75y^2}{9}} = \frac{55}{42}$. Наименьшее значение дроби – это $\frac{55}{42}$.

6. [5 баллов] Из пункта A в пункт B выезжают одновременно велосипедист и мотоциклист. Оба они движутся с постоянной скоростью, и мотоциклист прибывает в пункт B на 1 час раньше велосипедиста. Если бы велосипедист ехал со своей скоростью в течение того времени, что понадобилось мотоциклисту на дорогу от A к B, а мотоциклист – в течение того времени, что понадобилось велосипедисту на этот путь, то мотоциклист проехал бы на 49 километров больше. Если бы скорость каждого из них возросла на 7 км/ч, то велосипедист приехал бы в B на 36 минут позже мотоциклиста. Найдите расстояние между A и B.

Ответ: 84 километра.

 © МФТИ, 2023

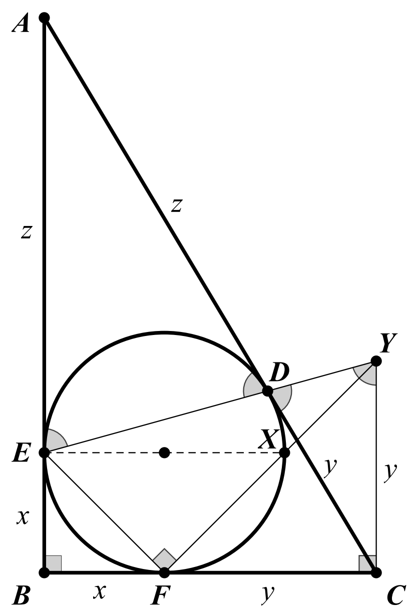
Решение. Пусть x – скорость мотоциклиста, y – скорость велосипедиста, а S – расстояние между A и B. По условию имеем

$$\begin{cases} \frac{S}{y} - \frac{S}{x} = 1, \\ \frac{Sx}{y} - \frac{Sy}{x} = 49, \\ \frac{S}{y+7} - \frac{S}{x+7} = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S(x-y)}{xy} = 1, \\ \frac{S(x-y)}{(x+7)(y+7)} = \frac{3}{5}, \\ \frac{S\left(x^2-y^2\right)}{xy} = 49. \end{cases}$$

Разделив третье уравнение на первое, получаем равенство $x+y=49$, а разделив первое уравнение на второе – равенство $\frac{(x+7)(y+7)}{xy} = \frac{5}{3}$. Последнее уравнение может быть преобразовано так: $3(xy+7x+7y+49) = 5xy \Leftrightarrow 2xy - 21(x+y) - 147 = 0$. Так как $x+y=49$, отсюда следует, что $xy = 588$. Полученная система имеет два решения $(21;28)$ и $(28;21)$. Поскольку $x > y$ (мотоциклист приезжает раньше, следовательно, едет быстрее), подходит только второе решение. Тогда $S = \frac{2xy}{x-y} = 84$.

7. [6 баллов] Вписанная окружность ω прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B касается его сторон CA, AB, BC в точках D, E, F соответственно. Луч ED пересекает прямую, перпендикулярную BC, проходящую через вершину C, в точке Y; X – вторая точка пересечения прямой FY с окружностью ω. Известно, что $EX = \sqrt{2}XY$. Найдите отношение $AD : DC$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.



Решение. Пусть $BE = BF = x$, $CF = CD = y$, $AD = AE = z$. Поскольку $CY \parallel AE$, то треугольники AED и CYD подобны по двум углам. Так как треугольник ADE равнобедренный, то и треугольник CDY равнобедренный, $CY = CD = y$. Тогда треугольник CYF – равнобедренный прямоугольный, как и треугольник BEF, $\angle YFC = \angle EFB = 45^\circ$. Следовательно, треугольник EFX – равнобедренный прямоугольный с катетом $FX = x\sqrt{2}$ и гипотенузой $EX = 2x$. Далее, $XY = FY - FX = y\sqrt{2} - x\sqrt{2} = (y-x)\sqrt{2}$. По условию, $EX = XY\sqrt{2} = 2(y-x)$. Итак, $2x = 2(y-x)$, откуда $y = 2x$. По теореме Пифагора для треугольника ABC имеем $(x+y)^2 + (z+x)^2 = (y+z)^2$. Подставляя в это равенство $y = 2x$, раскрывая скобки и приводя подобные члены, находим, что либо $x = 0$, что невозможно, либо $z = 3x$. Отсюда $\frac{z}{y} = \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$.

 © МФТИ, 2023