Отборочный этап 2023/24

Задачи олимпиады: Математика 10 класс (2 попытка)

Задача 01

Задача 1 #1 ID 2692

> Дана возрастающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Известно, что $a_3 + a_6 = 23$, $a_6^2 - a_3^2 = 207$. Чему равен девятый член прогрессии?
>
> 999976292692

Ответ:
25

Задача 1 #2 ID 2693

> Дана убывающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Известно, что $a_3 + a_8 = 15$, $a_8^2 - a_3^2 = -75$. Чему равен двенадцатый член прогрессии?
>
> 999976292693

Ответ:
1

Задача 1 #3 ID 2694

> Дана возрастающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Известно, что $a_4 + a_8 = 14$, $a_8^2 - a_4^2 = 56$. Чему равен восемнадцатый член прогрессии?
>
> 999976292694

Ответ:
19

Задача 1 #4 ID 2695

> Дана убывающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Известно, что $a_2 + a_5 = 23$, $a_5^2 - a_2^2 = -225$. Чему равен седьмой член прогрессии?
>
> 999976292695

Ответ:
0,088

Задача 1 #5 ID 2696

> Дана возрастающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ Известно, что $a_2 + a_7 = 16$, $a_7^2 - a_2^2 = 160$. Чему равен одиннадцатый член прогрессии?
>
>

Ответ:
21

Задача 02

Задача 2 #6 ID 2701

> Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n) = \Pi(n+1) = \Pi(n+2) < \Pi(n+3) = 648$.
>
>

Ответ:
89908

Задача 2 #7 ID 2697

> Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n) = \Pi(n+1) = \Pi(n+2) < \Pi(n+3) = 360$.
>
>

Ответ:
58908

Задача 2 #8 ID 2698

> Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n) = \Pi(n+1) = \Pi(n+2) < \Pi(n+3) = 504$.
>
>

Ответ:
78908

Задача 2 #9 ID 2699

Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n)=\Pi(n+1)=\Pi(n+2)<\Pi(n+3)=160$.

999976292699

Ответ:
45808

Задача 2 #10 ID 2700

Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k. Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n)=\Pi(n+1)=\Pi(n+2)<\Pi(n+3)=135$.

999976292700

Ответ:
35908

Задача 03

Задача 3 #11 ID 2702

20 школьников записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 13 школьников, на физику - 10 школьников, а 9 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 9 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.

999976292702

Ответ:
3

Задача 3 #12 ID 2703

> 28 школьников записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 11 школьников, на физику - 15 школьников, а 14 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 10 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.
>
>

Ответ:

2

Задача 3 #13 ID 2704

> 34 школьника записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 14 школьников, на физику - 18 школьников, а 20 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 13 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.
>
>

Ответ:

5

Задача 3 #14 ID 2705

> 25 школьников записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 11 школьников, на физику - 14 школьников, а 13 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 10 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.
>
>

Ответ:

3

Задача 3 #15 ID 2706

> 32 школьника записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 14 школьников, на физику - 14 школьников, а 16 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 11 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.
>
> 999976292706

Ответ:
1

Задача 04

Задача 4 #16 ID 2707

> Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 70 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 50 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением $40\,\text{км}/\text{ч}^2$. Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.
>
> 999976292707

Ответ:
38,75

Задача 4 #17 ID 2708

> Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 20 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 30 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением $40\,\text{км}/\text{ч}^2$. Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.
>
> 999976292708

Ответ:
8,75

Задача 4 #18 ID 2709

> Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 45 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 42 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением $48\,\text{км}/\text{ч}^2$. Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.
>
> 999976292709

Ответ:
26,625

Задача 4 #19 ID 2710

> Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 62 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 63 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением $36\,\text{км}/\text{ч}^2$. Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.
>
> 999976292710

Ответ:
6,875

Задача 4 #20 ID 2711

> Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 52 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 63 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением $42\,\text{км}/\text{ч}^2$. Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.
>
> 999976292711

Ответ:
4,75

Задача 05

Задача 5 #21 ID 2712

В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, пересекает прямую CD в точке P. Известно, что высота ромба равна 1, а $CP = \dfrac{9}{2\sqrt{2}}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.

Ответ:
3

Задача 5 #22 ID 2713

В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, пересекает прямую CD в точке P. Известно, что высота ромба равна 1, а $CP = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.

Ответ:
2

Задача 5 #23 ID 2714

В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, пересекает прямую CD в точке P. Известно, что высота ромба равна 3, а $CP = \dfrac{16}{\sqrt{7}}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.

Ответ:
4

Задача 5 #24 ID 2715

В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, пересекает прямую CD в точке P. Известно, что высота ромба равна 4, а $CP = \dfrac{25}{3}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.

Ответ:
5

Задача 5 #25 ID 2716

> В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, пересекает прямую CD в точке P. Известно, что высота ромба равна 3, а $CP = \frac{25}{4}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.
>
> 999976292716

Ответ:
5

Задача 06

Задача 6 #26 ID 2717

> Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 11x = m$ и $x^2 - 2x = k$ имеют два общих корня?
>
> 999976292717

Ответ:
21

Задача 6 #27 ID 2718

> Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 4x^2 - x = m$ и $x^2 - 2x = k$ имеют два общих корня?
>
> 999976292718

Ответ:
-5

Задача 6 #28 ID 2719

> Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - x^2 - 11x = m$ и $x^2 + 2x = k$ имеют два общих корня?
>
> 999976292719

Ответ:
-10

Задача 6 #29 ID 2720

Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 + 5x^2 - x = m$ и $x^2 + 2x = k$ имеют два общих корня?

Ответ:
28

Задача 6 #30 ID 2721

Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 4x^2 - x = m$ и $x^2 - 2x = k$ имеют два общих корня?

Ответ:
-5

Задача 07

Задача 7 #31 ID 2722

Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел

$$x - 2y - 2{,}5; \quad 2x - y - 3; \quad x^2 - 2x + y^2 + y + 3; \quad x^2 - x + y^2 + 2y + 2{,}5$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x + y$.

Ответ:
-1

Задача 7 #32 ID 2723

Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел

$$y - 2x - 1{,}5; \quad 2y - x - 2; \quad y^2 - 2y + x^2 + x + 4; \quad y^2 - y + x^2 + 2x + 3{,}5$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x - y$.

Ответ:
-3

Задача 7 #33 ID 2724

> Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел
>
> $$x-3y-5;\quad 3x-y-5{,}5;\quad x^2-3x+y^2+y+5{,}5;\quad x^2-x+y^2+3y+5$$
>
> равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x-y$.
>
>

Ответ:
4

Задача 7 #34 ID 2725

> Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел
>
> $$y-3x-4;\quad 3y-x-4,5;\quad y^2-3y+x^2+x+6,5;\quad y^2-y+x^2+3x+6$$
>
> равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x-y$.
>
>

Ответ:
-4

Задача 7 #35 ID 2726

> Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел
>
> $$x-2y-2{,}5;\quad 2x-y-3{,}5;\quad 2x^2-2x+y^2+y+3;\quad 2x^2-x+y^2+2y+2$$
>
> равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x+y$.
>
>

Ответ:
-1,5

Задача 08

Задача 8 #36 ID 2727

> В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH. Точки M и N - середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 90, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{18}{5}$. Площадь треугольника BHN равна 420, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{42}{5}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.
>
> 999976292727

Ответ:

13,6

Задача 8 #37 ID 2728

> В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH. Точки M и N - середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 120, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{15}{4}$. Площадь треугольника BHN равна 48, а радиус вписанной в него окружности равен 3. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.
>
> 999976292728

Ответ:

7

Задача 8 #38 ID 2729

> В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH. Точки M и N - середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 135, а радиус вписанной в него окружности равен 5. Площадь треугольника BHN равна 945, а радиус вписанной в него окружности равен $8{,}75$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.
>
> 999976292729

Ответ:

16

Задача 8 #39 ID 2730

В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH. Точки M и N - середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 243, а радиус вписанной в него окружности равен 6. Площадь треугольника BHN равна 810, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{20}{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

999976292730

Ответ:
13

Задача 8 #40 ID 2731

В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH. Точки M и N - середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 675, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{45}{4}$. Площадь треугольника BHN равна 165, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{55}{12}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

999976292731

Ответ:
17,5

Задача 09

Задача 9 #41 ID 2732

В каждую клетку доски 24×30 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?

999976292732

Ответ:
360

Задача 9 #42 ID 2733

> В каждую клетку доски 22×36 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?
>
>

Ответ:
396

Задача 9 #43 ID 2734

> В каждую клетку доски 28×40 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?
>
>

Ответ:
560

Задача 9 #44 ID 2735

> В каждую клетку доски 30×26 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?
>
>

Ответ:
390

Задача 9 #45 ID 2736

> В каждую клетку доски 34×38 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?
>
>

Ответ:
646

Задача 10

Задача 10 #46 ID 2737

> За круглый стол сели 90 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?
>
> 999976292737

Ответ:
60

Задача 10 #47 ID 2738

> За круглый стол сели 78 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?
>
> 999976292738

Ответ:
52

Задача 10 #48 ID 2739

> За круглый стол сели 66 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?
>
> 999976292739

Ответ:
44

Задача 10 #49 ID 2740

> За круглый стол сели 105 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?
>
> 999976292740

Ответ:
70

Задача 10 #50 ID 2741

За круглый стол сели 114 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ:
76