9 КЛАСС. Вариант 15

1. [3 балла] Вася строит башни из кубиков. Когда он построил N башен по 22 кубика, у него осталось 3 кубика. После чего он из всех своих кубиков построил $N-1$ башню так, что во всех башнях кубиков оказалось поровну. Какое наибольшее количество кубиков могло быть у Васи, если известно, что их меньше 300?

   Ответ: 135.

   Решение. Общее число кубиков равно $22N+3$. Это число делится на $N-1$, поэтому число $\frac{22N+3}{N-1} = 22 + \frac{25}{N-1}$ – целое, откуда $N-1=1$, $N-1=5$ или $N-1=25$. В первом случае у Васи 47 кубиков, во втором – 135, в третьем – 575. Подходит второй вариант.

2. [4 балла] Решите неравенство $|x^2+7x+12| + |x^2+2x-8| \leqslant |5x+20|$.

   Ответ: $x \in \{-4\} \cup [-3;2]$.

   Решение. Заметим, что разность выражений под модулями в левой части неравенства равна выражению под модулем в правой части. Поэтому имеет смысл замена $u = x^2+7x+12$, $v = x^2+2x-8$. В результате неравенство принимает вид $|u|+|v| \leqslant |u-v|$. Так как обе его части неотрицательны, возведение в квадрат является равносильным. В итоге имеем $u^2+2|uv|+v^2 \leqslant u^2-2uv+v^2 \Leftrightarrow |uv| \leqslant -uv \Leftrightarrow uv \leqslant 0$. Значит, исходное неравенство равносильно следующему: $(x^2+7x+12)(x^2+2x-8) \leqslant 0 \Leftrightarrow (x+3)(x+4)^2(x-2) \leqslant 0$. Решая это неравенство методом интервалов, находим $x \in \{-4\} \cup [-3;2]$.

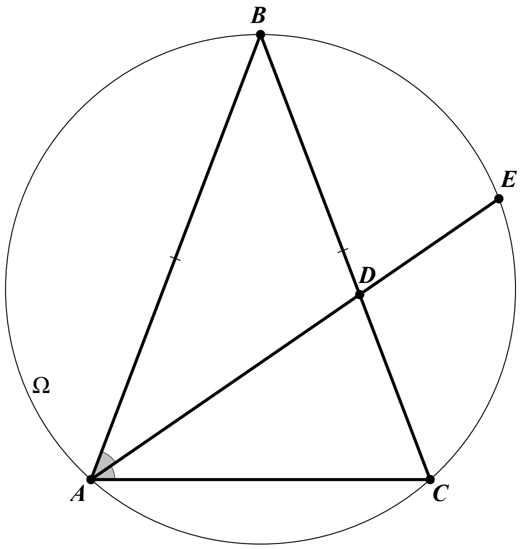
3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению $x^2+3x+3=6^y$.

   Ответ: $(-2;0)$, $(-1;0)$.

   Решение. Уравнение можно переписать в виде $x(x+3) = 6^y - 3$. При любом целом x множители в левой части уравнения – числа разной чётности, поэтому их произведение чётно. При $y<0$ левая часть – целое число, а правая – нет. При $y>0$ правая часть нечетна. Оба эти случая не подходят. Остаётся рассмотреть $y=0$. Тогда уравнение принимает вид $x^2+3x+2=0$. Следовательно, $x=-2$ или $x=-1$. Получаем две пары чисел, удовлетворяющие условию: $(-2;0)$, $(-1;0)$.

4. [5 баллов] Вокруг равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность Ω. Прямая, содержащая биссектрису AD треугольника ABC, пересекает повторно Ω в точке E. Найдите периметр четырёхугольника $ABEC$, если известно что площади треугольников BED и CED равны 5 и 6 соответственно.

Ответ: $\sqrt{110} + \frac{22\sqrt{22}}{5}$.



Решение. AE – биссектриса угла ACB, поэтому дуги BE и EC равны (на них опираются равные вписанные углы), а также равны одноимённые им хорды. По свойству биссектрисы $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{S_{BED}}{S_{CED}} = \frac{5}{6}$. Пусть BH – высота равнобедренного треугольника ABC (тогда BH является также его медианой). Обозначим $\angle BAH = \beta$. Из треугольника ABH находим $\cos\beta = \frac{AH}{AB} = \frac{AC/2}{AB} = \frac{3}{5}$; тогда $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{4}{5}$. Четырёхугольник $ABEC$ вписан в окружность, поэтому $\angle BEC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \beta$. Площадь треугольника BCE равна $\frac{1}{2}BE \cdot EC \sin\angle BEC = \frac{1}{2}BE^2 \sin(180^\circ - \beta) = \frac{1}{2}BE^2 \cdot \frac{4}{5}$, а по условию она равна 11, значит, $BE = \frac{\sqrt{110}}{2}$. По теореме косинусов для треугольника BEC имеем $BC^2 = 2BE^2 - 2BE^2\cos(180^\circ - \beta) = 2 \cdot \frac{55}{2} \cdot \left(1 - \left(-\frac{3}{5}\right)\right) = 88$.

Тогда $BC = 2\sqrt{22}$, $AC = \frac{6}{5}AB = \frac{6}{5}BC$. В итоге периметр четырёхугольника $ABEC$ равен $(BE + EC) + (AB + AC) = 2BE + \frac{11}{5}BC = \sqrt{110} + \frac{22\sqrt{22}}{5}$.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует значение параметра b такое, что уравнение $5x^2 + (2a+9)x + 7a - 10b = 0$ имеет два корня x_1 и x_2 такие, что $5 \leqslant x_1 \leqslant 10$ и $14 \leqslant x_2 \leqslant 15$.

Ответ: $a \in [-67; -52]$.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{2a+9}{5}$. Сложив два неравенства, данных в условии, имеем $19 \leqslant x_1 + x_2 \leqslant 25$, откуда $19 \leqslant -\frac{2a+9}{5} \leqslant 25 \Leftrightarrow -67 \leqslant a \leqslant -52$.
Покажем, что все эти значения a удовлетворяют условию задачи. Если $a \in [-67; -52]$, то $-\frac{2a+9}{2} \in [19; 25]$, поэтому можно выбрать такие числа x_1 и x_2, что $x_1 + x_2 = -\frac{2a+9}{2}$, $5 \leqslant x_1 \leqslant 10$, $14 \leqslant x_2 \leqslant 15$. Выберем значение параметра b, удовлетворяющее равенству $x_1x_2 = \frac{7a-10b}{5}$. Такое значение существует, так как относительно b это уравнение линейное. При этом b по теореме, обратной теореме Виета, квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2, что и требовалось доказать.

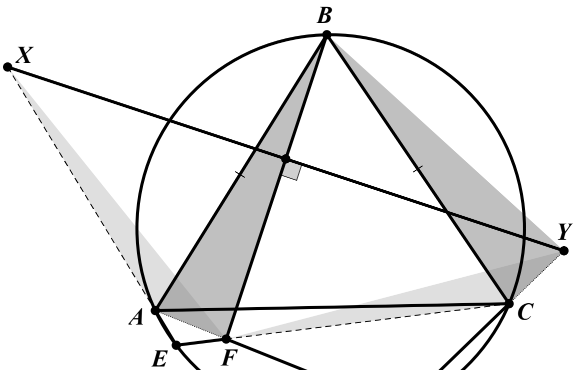
6. [5 баллов] Кузнечик прыгает по целочисленным узлам координатной сетки. За один шаг он может либо переместиться на одну клетку вверх или вправо, если при этом он попадает в точку, в которой не был раньше; либо вернуться на один шаг назад по уже пройденному пути – соответственно, вниз или влево. Сколько существует различных путей с началом в точке $O(0;0)$ и концом в точке $A(3;5)$ таких, что в точку A кузнечик попадает не более чем за 10 шагов? (Достигая точки A, кузнечик останавливается.)

Ответ: 504.

Решение. Для того, чтобы попасть из начала координат в точку A, кузнечику нужно сместиться на 3 клетки вправо и на 5 вверх. Следовательно, самое малое количество шагов, которое он может совершить – это 8. В этом случае кузнечик каждый раз делает шаг вверх или вправо, не возвращаясь назад. Число таких путей равно C_8^3 (из 8 шагов кузнечика надо выбрать, какие 3 будут сделаны вправо).
Второй вариант пути содержит 10 шагов, из которых 9 совершается в сторону приближения к точке A, и один шаг – назад. Если возврат произошёл влево, то дальше кузнечик будет вынужден обязательно переместиться вверх, т.к. в точке справа он уже был, и туда ему путь закрыт. Аналогично, возвратившись вниз, кузнечик должен будет следующий шаг совершить вправо, так как в точке сверху он уже был. Таким образом, каждый путь длиной в 10 шагов можно получить из пути длиной в 8 шагов, совершив в какой-то одной его точке (кроме точки A) отклонение на 1 шаг в единственную допустимую сторону, и затем вернувшись назад. Значит, таких путей $C_8^3 \cdot 8$. Итого получаем $C_8^3 + C_8^3 \cdot 8 = C_8^3 \cdot 9 = 504$.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 7{,}5$, $XY = 15$.

Ответ: $\frac{225}{4}$.



Решение. Углы EAD и ECD равны как вписанные в окружность и опирающиеся на одну дугу. Значит, смежные с ними углы XAF и YCF также равны. А так как $AX = CF$, $AF = CY$, то треугольники AXF и FCY равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $XF = YF$, т.е. точка F равноудалена от концов отрезка XY, следовательно, точка F лежит на серединном перпендикуляре к нему.
Четырёхугольник $BADC$ вписан в окружность, поэтому сумма его противоположных углов равна $180°$. Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BCD = 180° - \alpha$, $\angle BCY = 180° - \angle BCD = \alpha$. Но тогда треугольники AFB и CYB также равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, $BY = BF$. Аналогично доказывается равенство $\triangle BAX = \triangle BCF$, откуда $BX = BF$, поэтому $BX = BY$. Значит, точка B также лежит на серединном перпендикуляре к XY. Следовательно, $BF \perp XY$, а площадь четырёхугольника $BXFY$ равна $\frac{BF \cdot XY}{2} = \frac{225}{4}$.

9 КЛАСС. Вариант 16

1. [3 балла] Вася строит башни из кубиков. Когда он построил N башен по 19 кубиков, у него осталось 6 кубиков. После чего он из всех своих кубиков построил $N-1$ башню так, что во всех башнях кубиков оказалось поровну. Какое наименьшее количество кубиков могло быть у Васи, если известно, что их больше 100?

   Ответ: 120.

   Решение. Общее число кубиков равно $19N+6$. Это число делится на $N-1$, поэтому число $\frac{19N+6}{N-1}=19+\frac{25}{N-1}$ – целое, откуда $N-1=1$, $N-1=5$ или $N-1=25$. В первом случае у Васи 44 кубика, во втором – 120, в третьем – 500. Подходит второй вариант.

2. [4 балла] Решите неравенство $|x^2-7x+6|+|x^2-3x-18|\leqslant|4x-24|$.

   Ответ: $x\in[-3;1]\cup\{6\}$.

   Решение. Заметим, что разность выражений под модулями в левой части неравенства равна выражению под модулем в правой части. Поэтому имеет смысл замена $u=x^2-7x+6$, $v=x^2-3x-18$. В результате неравенство принимает вид $|u|+|v|\leqslant|u-v|$. Так как обе его части неотрицательны, возведение в квадрат является равносильным. В итоге имеем $u^2+2|uv|+v^2\leqslant u^2-2uv+v^2\Leftrightarrow|uv|\leqslant-uv\Leftrightarrow uv\leqslant 0$. Значит, исходное неравенство равносильно следующему: $(x^2-7x+6)\left(x^2-3x-18\right)\leqslant 0\Leftrightarrow(x+3)(x-6)^2(x-1)\leqslant 0$. Решая это неравенство методом интервалов, находим $x\in[-3;1]\cup\{6\}$.

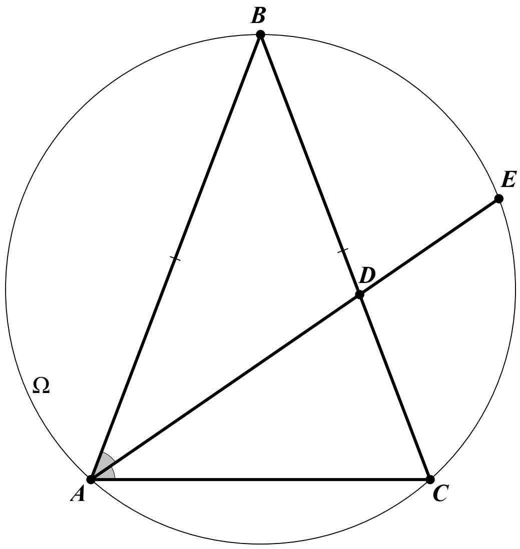
3. [4 балла] Найдите все пары целых чисел $(x;y)$, удовлетворяющие уравнению $x^2+5x-5=8^y$.

   Ответ: $(-6;0)$, $(1;0)$.

   Решение. Уравнение можно переписать в виде $x(x+5)=8^y+5$. При любом целом x множители в левой части уравнения – числа разной чётности, поэтому их произведение чётно. При $y<0$ левая часть – целое число, а правая – нет. При $y>0$ правая часть нечетна. Оба эти случая не подходят. Остаётся рассмотреть $y=0$. Тогда уравнение принимает вид $x^2+5x-6=0$. Следовательно, $x=-6$ или $x=1$. Получаем две пары чисел, удовлетворяющие условию: $(-6;0)$, $(1;0)$.

4. [5 баллов] Вокруг равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) описана окружность Ω. Прямая, содержащая биссектрису AD треугольника ABC, пересекает повторно Ω в точке E. Найдите периметр четырёхугольника $ABEC$, если известно что площади треугольников BED и CED равны 5 и 8 соответственно.

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{390} + \frac{26}{5}\sqrt{39}$.



Решение. AE – биссектриса угла ACB, поэтому дуги BE и EC равны (на них опираются равные вписанные углы), а также равны одноимённые им хорды. По свойству биссектрисы $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{S_{BED}}{S_{CED}} = \frac{5}{8}$. Пусть BH – высота равнобедренного треугольника ABC (тогда BH является также его медианой). Обозначим $\angle BAH = \beta$. Из треугольника ABH находим $\cos\beta = \frac{AH}{AB} = \frac{AC/2}{AB} = \frac{4}{5}$; тогда $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \frac{3}{5}$. Четырёхугольник $ABEC$ вписан в окружность, поэтому $\angle BEC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \beta$. Площадь треугольника BCE равна $\frac{1}{2}BE \cdot EC \sin\angle BEC = \frac{1}{2}BE^2 \sin(180^\circ - \beta) = \frac{1}{2}BE^2 \cdot \frac{3}{5}$, а по условию она равна 13, значит, $BE = \sqrt{\frac{130}{3}}$. По теореме косинусов для треугольника BEC имеем $BC^2 = 2BE^2 - 2BE^2\cos(180^\circ - \beta) = 2\cdot\frac{130}{3}\cdot\left(1-\left(-\frac{4}{5}\right)\right) = 156$.
Тогда $BC = 2\sqrt{39}$, $AC = \frac{8}{5}AB = \frac{8}{5}BC$. В итоге периметр четырёхугольника $ABEC$ равен $(BE+EC)+(AB+AC) = 2BE + \frac{13}{5}BC = 2\sqrt{\frac{130}{3}} + \frac{26\sqrt{39}}{5}$.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых существует значение параметра b такое, что уравнение $2x^2+(3a-7)x-11a+13b=0$ имеет два корня x_1 и x_2 такие, что $-11 \leqslant x_1 \leqslant -9$ и $-5 \leqslant x_2 \leqslant -4$.

Ответ: $a \in [11; 13]$.

Решение. По теореме Виета $x_1+x_2 = \frac{7-3a}{2}$. Сложив два неравенства, данных в условии, имеем $-16 \leqslant x_1+x_2 \leqslant -13$, откуда $-16 \leqslant \frac{7-3a}{2} \leqslant -13 \Leftrightarrow 11 \leqslant a \leqslant 13$.
Покажем, что все эти значения a удовлетворяют условию задачи. Если $a \in [11;13]$, то $\frac{7-3a}{2} \in [-16;-13]$, поэтому можно выбрать такие числа x_1 и x_2, что $x_1+x_2 = \frac{7-3a}{2}$, $-11 \leqslant x_1 \leqslant -9$, $-5 \leqslant x_2 \leqslant -4$. Выберем значение параметра b, удовлетворяющее равенству $x_1x_2 = \frac{13b-11a}{2}$. Такое значение существует, так как относительно b это уравнение линейное. При этом b по теореме, обратной теореме Виета, квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2, что и требовалось доказать.

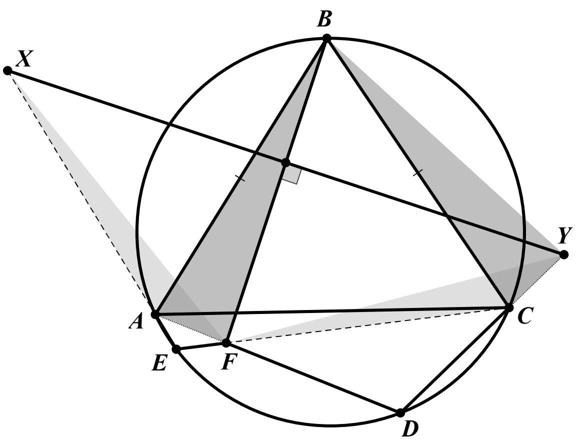
6. [5 баллов] Кузнечик прыгает по целочисленным узлам координатной сетки. За один шаг он может либо переместиться на одну клетку вниз или вправо, если при этом он попадает в точку, в которой не был раньше; либо вернуться на один шаг назад по уже пройденному пути – соответственно, вверх или влево. Сколько существует различных путей с началом в точке $O(0;0)$ и концом в точке $A(4;-3)$ таких, что в точку A кузнечик попадает не более чем за 9 шагов? (Достигая точки A, кузнечик останавливается.)

Ответ: 280.

Решение. Для того, чтобы попасть из начала координат в точку A, кузнечику нужно сместиться на 4 клетки вправо и на 3 вниз. Следовательно, самое малое количество шагов, которое он может совершить – это 7. В этом случае кузнечик каждый раз делает шаг вниз или вправо, не возвращаясь назад. Число таких путей равно C_7^3 (из 7 шагов кузнечика надо выбрать, какие 3 будут сделаны вниз).
Второй вариант пути содержит 9 шагов, из которых 8 совершается в сторону приближения к точке A, и один шаг – назад. Если возврат произошёл влево, то дальше кузнечик будет вынужден обязательно переместиться вниз, т.к. в точке справа он уже был, и туда ему путь закрыт. Аналогично, возвратившись вверх, кузнечик должен будет следующий шаг совершить вправо, так как в точке сверху он уже был. Таким образом, каждый путь длиной в 9 шагов можно получить из пути длиной в 7 шагов, совершив в какой-то одной его точке (кроме точки A) отклонение на 1 шаг в единственную допустимую сторону, и затем вернувшись назад. Значит, таких путей $C_7^3 \cdot 7$. Итого получаем $C_7^3 + C_7^3 \cdot 7 = C_7^3 \cdot 8 = 280$.

7. [6 баллов] Равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписан в окружность ω, а на дуге AC, не содержащей точку B, взяты точки E и D так, что отрезки AD и CE пересекаются в точке F. На лучах EA и DC отметили точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = CF$ и $CY = AF$. Найдите площадь четырёхугольника $BXFY$, если $BF = 36$, $XY = 69$.

Ответ: 1242.



Решение. Углы EAD и ECD равны как вписанные в окружность и опирающиеся на одну дугу. Значит, смежные с ними углы XAF и YCF также равны. А так как $AX = CF$, $AF = CY$, то треугольники AXF и FCY равны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда $XF = YF$, т.е. точка F равноудалена от концов отрезка XY, следовательно, точка F лежит на серединном перпендикуляре к нему.
Четырёхугольник $BADC$ вписан в окружность, поэтому сумма его противоположных углов равна $180°$. Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle BCD = 180° - \alpha$, $\angle BCY = 180° - \angle BCD = \alpha$. Но тогда треугольники AFB и CYB также равны по двум сторонам и углу между ними, а значит, $BY = BF$. Аналогично доказывается равенство $\triangle BAX = \triangle BCF$, откуда $BX = BF$, поэтому $BX = BY$. Значит, точка B также лежит на серединном перпендикуляре к XY. Следовательно, $BF \perp XY$, а площадь четырёхугольника $BXFY$ равна $\frac{BF \cdot XY}{2} = 1242$.

