

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

Ответ: $x = 18, x = 0$.

Решение. Пусть b_1, b_2, b_3, \dots – данная геометрическая прогрессия, а q – её знаменатель. Тогда $b_7 = b_1q^6$, $b_9 = b_1q^8$, $b_{15} = b_1q^{14}$, откуда следует, что $b_9^4 = b_7^3b_{15}$, а b_7, b_9 и b_{15} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(x+3)^4 = \left(\sqrt{(25x-9)(x-6)}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}},$$

что на ОДЗ равносильно уравнению $(x+3)^4 = (25x-9)^2$. Решаем его:

$$(x^2+6x+9)^2 = (25x-9)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+9 = 25x-9, \\ x^2+6x+9 = 9-25x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 18, \\ x = -31, \\ x = 0. \end{cases}$$

Значение $x = 1$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x = -31$ не подходит, так как при этом $b_7 > 0$, $b_9 < 0$, $b_{15} > 0$, что невозможно.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

Ответ: $(-2 - 2\sqrt{2}; 5; 0)$, $(\frac{\sqrt{11}-4}{2}; 5; 0)$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y , а правая только от z . Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z) = \sqrt{81-z^2}$ является отрезок $[0; 9]$. Пусть $h(y) = |y+4| + 4|y-5|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y . В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскроется второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y \geq 5$ и убывает при $y \leq 5$. Отсюда следует, что $y = 5$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(5) = 9$. Поскольку $\min h(y) = \max f(z) = 9$, из второго уравнения находим, что $f(z) = 9 \Leftrightarrow z = 0$ и $h(y) = 9 \Leftrightarrow y = 5$.

Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+5 - 2\sqrt{(x+5)(1-x)} + 1-x$, откуда $2\sqrt{5-4x-x^2} = 6-t^2$. Уравнение принимает вид $t+4 = 6-t^2$. Решая его, находим

$t = -2$ или $t = 1$.

- Если $t = 1$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} = \sqrt{1-x} + 1 &\Leftrightarrow x+5 = 1-x+2\sqrt{1-x}+1 \Leftrightarrow 2x+3 = 2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (2x+3)^2 = 4(1-x), \\ 2x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-4 \pm \sqrt{11}}{2}, \\ x \geq -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{11}-4}{2}. \end{aligned}$$

- Аналогично рассматриваем второе значение $t = -2$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+5} + 2 = \sqrt{1-x} &\Leftrightarrow x+5+4\sqrt{x+5}+4 = 1-x \Leftrightarrow 2\sqrt{x+5} = -x-4 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x+5) = (-x-4)^2, \\ -x-4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \pm 2\sqrt{2}, \\ x \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 - 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Итак, система имеет два решения: $(-2 - 2\sqrt{2}; 5; 0)$ и $(\frac{\sqrt{11}-4}{2}; 5; 0)$.

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 3(p+4) \cos x = 6 \cos 2x + 10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

Ответ: Решения есть при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.

Они задаются формулой $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Применяя формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и обозначая $\cos x = t$, приводим уравнение к виду $pt^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(p-1)t^3 + (t-1)^3$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно следующему: $(t\sqrt[3]{p-1})^3 = (1-t)^3 \Leftrightarrow t\sqrt[3]{p-1} = 1-t \Leftrightarrow t = \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$.

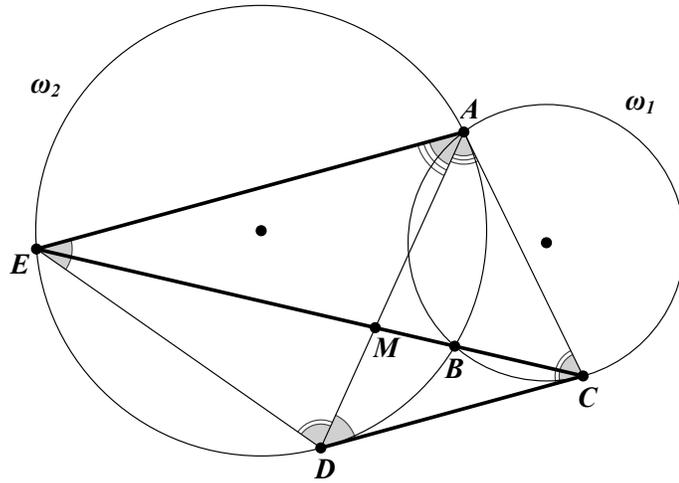
Ввиду ограниченности косинуса, отсюда получаем неравенства

$$\left| \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\sqrt[3]{p-1} \geq 1, \\ 1+\sqrt[3]{p-1} \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq -7, \\ p \geq 1. \end{cases}$$

При этих значениях p уравнение $\cos x = \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$ имеет решения $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2 : 5$, считая от вершины C .

Ответ: $\sqrt{\frac{5}{2}}$.



Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD . По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD . Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$. Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180^\circ$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окружность и опирается на дугу AC , не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (то есть AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$. Отсюда можно выразить, что $(\frac{ED}{CD})^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}$. Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDE$ через M . Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE . По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $3 \cdot C_{20\,000}^4 - 2 \cdot C_{10\,000}^2$.

Решение. Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки ℓ_1 и ℓ_2 – его средние линии (для определённости считаем, что средняя линия ℓ_1 горизонтальна, а ℓ_2 – вертикальна). Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно ℓ_1 через A_1 , относительно ℓ_2 – через A_2 , относительно O – через B . Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1 , достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше ℓ_1), после чего клетки в нижней половине получаются симметрией четырёх выбранных клеток относительно ℓ_1 . Так как в верхней половине прямоугольника всего 20 000 клеток, $|A_1| = C_{20\,000}^4$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить,

выбрав 4 клетки из 20 000 в левой половине прямоугольника (нужно отразить их относительно ℓ_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C_{20\,000}^4$.

Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|$. Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше ℓ_1 и левее ℓ_2). Отражая две клетки относительно ℓ_1 , получаем множество из четырёх закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно ℓ_2 , получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C_{10\,000}^2$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = C_{10\,000}^2$, $|A_2 \cap B| = C_{10\,000}^2$, $|A_1 \cap B| = C_{10\,000}^2$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3 \cdot C_{20\,000}^4 - 2 \cdot C_{10\,000}^2$.

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

Ответ: $(26; 34; 35)$, $(26; 34; 25)$, $(-27; -19; -18)$, $(-27; -19; -28)$.

Решение. Так как $(a - c)(b - c) = p^2$, где p – простое, а $a - c < b - c$ (за счёт того, что $a < b$), возможны следующие два варианта:

$$\begin{cases} a - c = 1, \\ b - c = p^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a - c = -p^2, \\ b - c = -1. \end{cases} \quad (*)$$

Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $b - a = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:

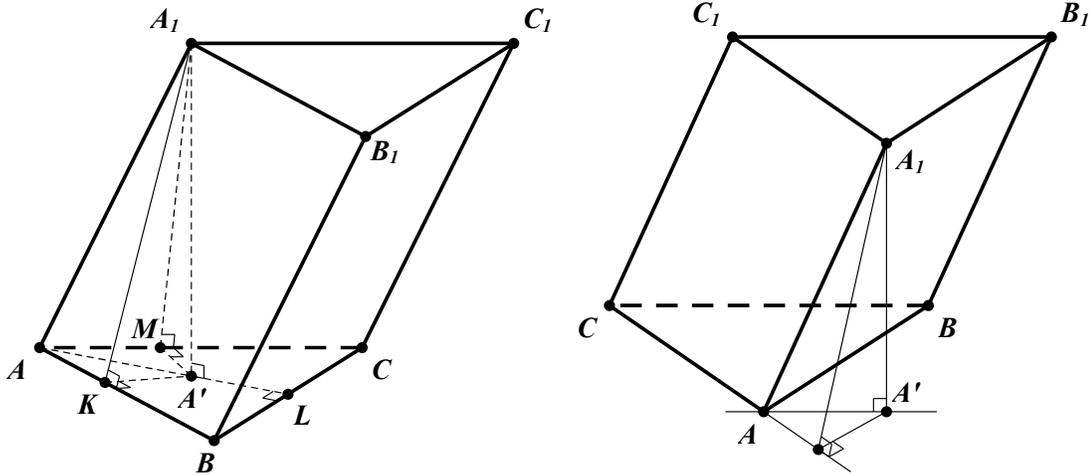
- $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k)$ – делится на 3;
- $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1)$ – также делится на 3;
- $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$, и делимость на 3 отсутствует.

Поскольку число $b - a$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $b - a = 8$. Добавляя сюда уравнение $a^2 + b = 710$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b . Решая её, находим $a = 26$, $b = 34$ или $a = -27$, $b = -19$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c . Это $c = a + p^2 = a + 9$ или $c = a - 1$.

Итого есть 4 пары $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(26; 34; 35)$, $(26; 34; 25)$, $(-27; -19; -18)$, $(-27; -19; -28)$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.

Ответ: $\sqrt[4]{3}$.



Решение. Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все её боковые грани имели бы равные площади. Так как в основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1, его сторона равна $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 3. Эти грани имеют равные площади, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1M и A_1K этих граней равны между собой. Пусть AA' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC . Рассмотрим два возможных случая.

1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC . По теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, то есть грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что $2 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 3$ – противоречие. Значит, этот случай невозможен.

2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC . Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{2}{a} = \sqrt{3}$. Так как площадь основания призмы равна 1, её объём есть $\sqrt{3}$. Несложно понять, что такая призма существует.

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

Ответ: $x = -1, x = 5$.

Решение. Пусть b_1, b_2, b_3, \dots – данная геометрическая прогрессия, а q – её знаменатель. Тогда $b_4 = b_1q^3$, $b_{10} = b_1q^9$, $b_{12} = b_1q^{11}$, откуда следует, что $b_{10}^4 = b_{12}^3b_4$, а b_4, b_{10} и b_{12} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(x+4)^4 = \left(\sqrt{(15x+6)(x-3)}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}},$$

что на ОДЗ равносильно уравнению $(x+4)^4 = (15x+6)^2$. Решаем его:

$$(x^2 + 8x + 16)^2 = (15x + 6)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 8x + 16 = 15x + 6, \\ x^2 + 8x + 16 = -15x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 5, \\ x = -22, \\ x = -1. \end{cases}$$

Значение $x = 2$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x = -22$ не подходит, так как при этом $b_4 > 0$, $b_{10} < 0$, $b_{12} > 0$, что невозможно.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

Ответ: $(2\sqrt{5}-1; 35; 0)$, $(-1 - \frac{3\sqrt{15}}{2}; 35; 0)$.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y , а правая только от z . Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z) = \sqrt{225-z^2}$ является отрезок $[0; 15]$. Пусть $h(y) = |y-20| + 2|y-35|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y . В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскроется второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y \geq 35$ и убывает при $y \leq 35$. Отсюда следует, что $y = 35$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(35) = 15$. Поскольку $\min h(y) = \max f(z) = 15$, из второго уравнения находим, что $f(z) = 15 \Leftrightarrow z = 0$ и $h(y) = 15 \Leftrightarrow y = 35$.

Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+7 - 2\sqrt{(x+7)(5-x)} + 5-x$, откуда $2\sqrt{35-2x-x^2} = 12 - t^2$. Уравнение принимает вид $t+6 = 12 - t^2$. Решая его,

находим $t = 2$ или $t = -3$.

- Если $t = 2$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{x+7} = \sqrt{5-x} + 2 &\Leftrightarrow x+7 = 5-x+4\sqrt{5-x}+4 \Leftrightarrow x-1 = 2\sqrt{5-x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 4(5-x), \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{20}, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5} - 1. \end{aligned}$$

- Аналогично рассматриваем второе значение $t = -3$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+7} + 3 = \sqrt{5-x} &\Leftrightarrow x+7+6\sqrt{x+7}+9 = 5-x \Leftrightarrow 6\sqrt{x+7} = -2x-11 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 36(x+7) = (-2x-11)^2, \\ -2x-11 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \pm \frac{3\sqrt{15}}{2}, \\ x \leq -\frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 - \frac{3\sqrt{15}}{2}. \end{aligned}$$

Итак, система имеет два решения: $(2\sqrt{5} - 1; 35; 0)$ и $(-1 - \frac{3\sqrt{15}}{2}; 35; 0)$.

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 6 \cos x = 3 \cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

Ответ: Решения есть при $p \in [-10; 4]$.

Они задаются формулой $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1+\sqrt[3]{2p-7}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Применяя формулы $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ и обозначая $\cos x = t$, приводим уравнение к виду $8t^3 - 12t^2 + 6t = 2p - 6$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(2t - 1)^3 = 2p - 7$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно следующему: $2t - 1 = \sqrt[3]{2p - 7} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt[3]{2p-7}+1}{2}$.

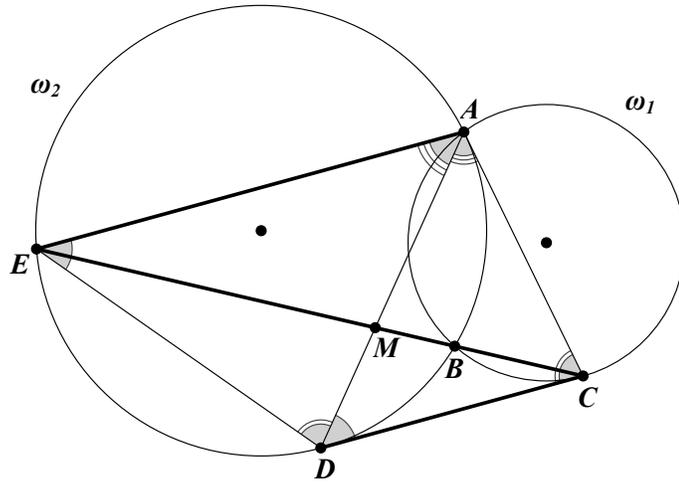
Ввиду ограниченности косинуса, отсюда получаем неравенства

$$\left| \frac{1 + \sqrt[3]{2p-7}}{2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sqrt[3]{2p-7} + 1 \leq 2 \Leftrightarrow -10 \leq p \leq 4.$$

При этих значениях p уравнение $\cos x = \frac{1+\sqrt[3]{2p-7}}{2}$ имеет решения $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1+\sqrt[3]{2p-7}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C .

Ответ: $\frac{5}{3}$.



Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD . По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD . Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$. Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180^\circ$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окружность и опирается на дугу AC , не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (то есть AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$. Отсюда можно выразить, что $(\frac{ED}{CD})^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}$. Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDE$ через M . Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE . По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = \frac{5}{3}$.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $3 \cdot C_{15000}^4 - 2 \cdot C_{7500}^2$.

Решение. Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки ℓ_1 и ℓ_2 – его средние линии (для определённости считаем, что средняя линия ℓ_1 горизонтальна, а ℓ_2 – вертикальна). Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно ℓ_1 через A_1 , относительно ℓ_2 – через A_2 , относительно O – через B . Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1 , достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше ℓ_1), после чего клетки в нижней половине получаются симметрией четырёх выбранных клеток относительно ℓ_1 . Так как в верхней половине прямоугольника всего 15 000 клеток, $|A_1| = C_{15000}^4$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить,

выбрав 4 клетки из 15 000 в левой половине прямоугольника (нужно отразить их относительно ℓ_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C_{15\,000}^4$.

Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|$. Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше ℓ_1 и левее ℓ_2). Отражая две клетки относительно ℓ_1 , получаем множество из четырёх закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно ℓ_2 , получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C_{7\,500}^2$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = C_{7\,500}^2$, $|A_2 \cap B| = C_{7\,500}^2$, $|A_1 \cap B| = C_{7\,500}^2$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3 \cdot C_{15\,000}^4 - 2 \cdot C_{7\,500}^2$.

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

Ответ: $(36; 28; 27)$, $(36; 28; 37)$, $(-21; -29; -20)$, $(-21; -29; -30)$.

Решение. Так как $(a - c)(b - c) = p^2$, где p – простое, а $a - c > b - c$ (за счёт того, что $a > b$), возможны следующие два варианта:

$$\begin{cases} b - c = 1, \\ a - c = p^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b - c = -p^2, \\ a - c = -1. \end{cases} \quad (*)$$

Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $a - b = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:

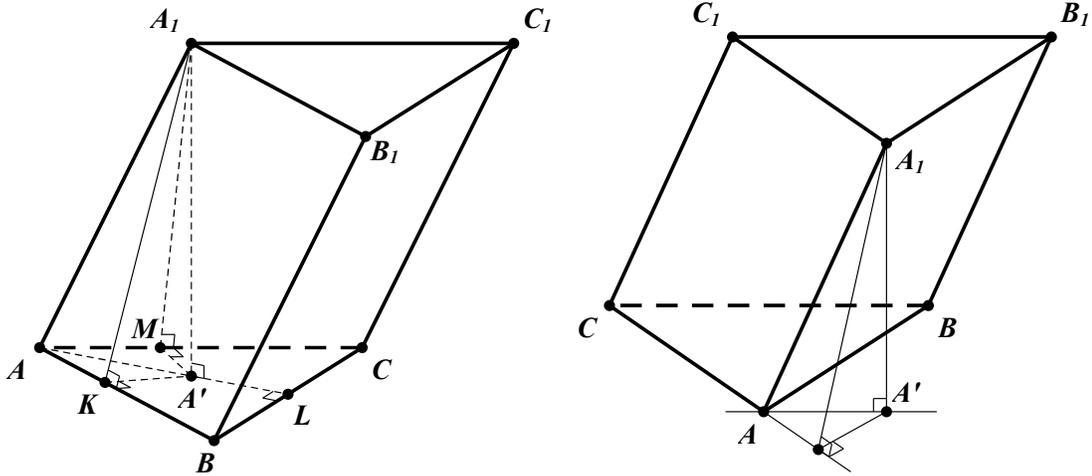
- $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k)$ – делится на 3;
- $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1)$ – также делится на 3;
- $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$, и делимость на 3 отсутствует.

Поскольку число $a - b$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $a - b = 8$. Добавляя сюда уравнение $a + b^2 = 820$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b . Решая её, находим $a = 36$, $b = 28$ или $a = -21$, $b = -29$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c . Это $c = a - p^2 = a - 9$ или $c = a + 1$.

Итого есть 4 пары $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(36; 28; 27)$, $(36; 28; 37)$, $(-21; -29; -20)$, $(-21; -29; -30)$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

Ответ: 2.



Решение. Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все её боковые грани имели бы равные площади. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 5. Эти грани имеют равные площади, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1M и A_1K этих граней равны между собой. Пусть AA' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC . Рассмотрим два возможных случая.

- 1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC . По теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, то есть грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что $2 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 3$ – противоречие ($a = 2$ – ребро основания призмы). Значит, этот случай невозможен.
- 2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC . Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{4}{a} = 2$. Несложно понять, что такая призма существует.

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$, двенадцатый член равен $2-x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$.

Ответ: $x = -19, x = -2$.

Решение. Пусть b_1, b_2, b_3, \dots – данная геометрическая прогрессия, а q – её знаменатель. Тогда $b_{10} = b_1 q^9, b_{12} = b_1 q^{11}, b_{18} = b_1 q^{17}$, откуда следует, что $b_{12}^4 = b_{10}^3 b_{18}$, а b_{10}, b_{12} и b_{18} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(2-x)^4 = \left(\sqrt{(25x+34)(3x+2)} \right)^3 \cdot \sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}},$$

что на ОДЗ равносильно уравнению $(2-x)^4 = (25x+34)^2$. Решаем его:

$$(x^2 - 4x + 4)^2 = (25x + 34)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 25x + 34, \\ x^2 - 4x + 4 = -25x - 34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = 30, \\ x = -2, \\ x = -19. \end{cases}$$

Значение $x = -1$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x = 30$ не подходит, так как при этом $b_{10} > 0, b_{12} < 0, b_{18} > 0$, что невозможно.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x-2z} + 7 = 2\sqrt{y-3x-x^2+z}, \\ |y+2| + 2|y-18| = \sqrt{400-z^2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{3+\sqrt{56}}{2}; 18; 0\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}; 18; 0\right)$.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y , а правая только от z . Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z) = \sqrt{400-z^2}$ является отрезок $[0; 20]$. Пусть $h(y) = |y+2| + 2|y-18|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y . В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскроется второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y \geq 18$ и убывает при $y \leq 18$. Отсюда следует, что $y = 18$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(18) = 20$. Поскольку $\min h(y) = \max f(z) = 20$, из второго уравнения находим, что $f(z) = 20 \Leftrightarrow z = 0$ и $h(y) = 20 \Leftrightarrow y = 18$.

Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{3-x} + 7 = 2\sqrt{18-3x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+6} - \sqrt{3-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+6 - 2\sqrt{(x+6)(3-x)} + 3-x$, откуда $2\sqrt{18-3x-x^2} = 9-t^2$. Уравнение принимает вид $t+9 = 9-t^2$. Решая его, находим

$t = 1$ или $t = -2$.

- Если $t = 1$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6} = \sqrt{3-x} + 1 &\Leftrightarrow x+6 = 3-x+2\sqrt{3-x}+1 \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 3-x, \\ x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}, \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{17}-3}{2}. \end{aligned}$$

- Аналогично рассматриваем второе значение $t = -2$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+6} + 2 = \sqrt{3-x} &\Leftrightarrow x+6+4\sqrt{x+6}+4 = 3-x \Leftrightarrow 4\sqrt{x+6} = -2x-7 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 16(x+6) = (-2x-7)^2, \\ -2x-7 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3 \pm \sqrt{56}}{2}, \\ x \leq -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3+\sqrt{56}}{2}. \end{aligned}$$

Итак, система имеет два решения: $\left(-\frac{3+\sqrt{56}}{2}; 18; 0\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}; 18; 0\right)$.

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$p \cos 3x + 6 \cos 2x + 3(p+4) \cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

Ответ: Решения есть при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.

Они задаются формулой $x = 2\pi k + \pi \pm \arccos \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Применяя формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и обозначая $\cos x = t$, приводим уравнение к виду $pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(p-1)t^3 + (t+1)^3$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно следующему: $(t\sqrt[3]{p-1})^3 = (-1-t)^3 \Leftrightarrow t\sqrt[3]{p-1} = -1-t \Leftrightarrow t = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$.

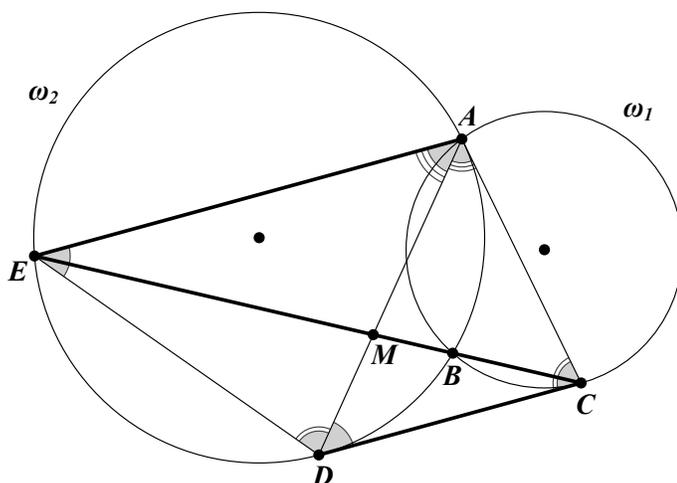
Ввиду ограниченности косинуса, отсюда получаем неравенства

$$\left| -\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{p-1} \geq 1, \\ 1 + \sqrt[3]{p-1} \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p \leq -7, \\ p \geq 1. \end{cases}$$

При этих значениях p уравнение $\cos x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$ имеет решения $x = 2\pi k + \pi \pm \arccos \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C .

Ответ: $2\sqrt{\frac{5}{7}}$.



Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD . По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD . Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$. Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180^\circ$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окружность и опирается на дугу AC , не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (то есть AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$. Отсюда можно выразить, что $(\frac{ED}{CD})^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}$. Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDE$ через M . Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE . По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $3 \cdot C_{30000}^4 - 2 \cdot C_{15000}^2$.

Решение. Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки ℓ_1 и ℓ_2 – его средние линии (для определённости считаем, что средняя линия ℓ_1 горизонтальна, а ℓ_2 – вертикальна). Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно ℓ_1 через A_1 , относительно ℓ_2 – через A_2 , относительно O – через B . Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1 , достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше ℓ_1), после чего клетки в нижней половине получаются симметрией четырёх выбранных клеток относительно ℓ_1 . Так как в верхней половине прямоугольника всего 30 000 клеток, $|A_1| = C_{30000}^4$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить,

выбрав 4 клетки из 30 000 в левой половине прямоугольника (нужно отразить их относительно ℓ_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C_{30\,000}^4$.

Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|$. Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше ℓ_1 и левее ℓ_2). Отражая две клетки относительно ℓ_1 , получаем множество из четырёх закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно ℓ_2 , получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C_{15\,000}^2$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = C_{15\,000}^2$, $|A_2 \cap B| = C_{15\,000}^2$, $|A_1 \cap B| = C_{15\,000}^2$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3 \cdot C_{30\,000}^4 - 2 \cdot C_{15\,000}^2$.

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

Ответ: $(31; 39; 30)$, $(31; 39; 40)$, $(-32; -24; -23)$, $(-32; -24; -33)$.

Решение. Так как $(a - c)(b - c) = p^2$, где p – простое, а $a - c < b - c$ (за счёт того, что $a < b$), возможны следующие два варианта:

$$\begin{cases} a - c = 1, \\ b - c = p^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a - c = -p^2, \\ b - c = -1. \end{cases} \quad (*)$$

Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $b - a = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:

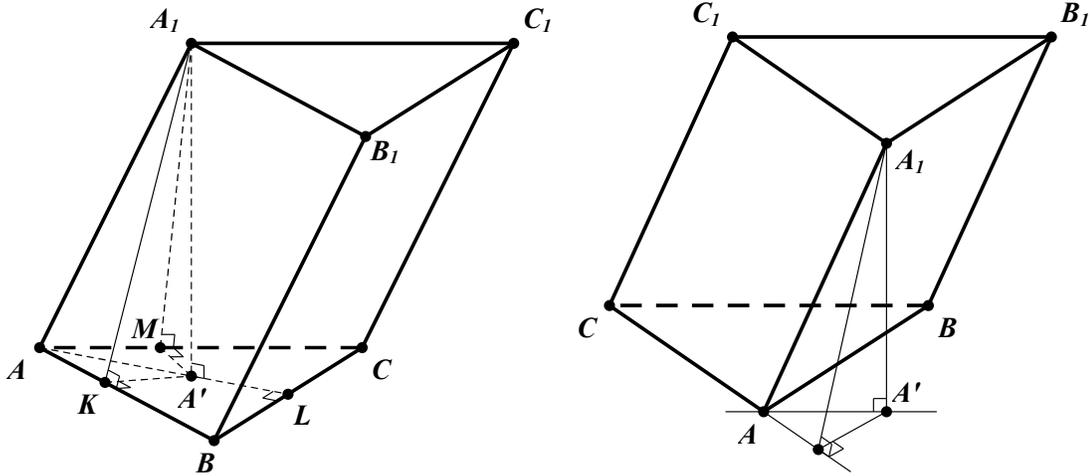
- $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k)$ – делится на 3;
- $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1)$ – также делится на 3;
- $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$, и делимость на 3 отсутствует.

Поскольку число $b - a$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $b - a = 8$. Добавляя сюда уравнение $a^2 + b = 1000$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b . Решая её, находим $a = 31$, $b = 39$ или $a = -32$, $b = -24$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c . Это $c = a + p^2 = a + 9$ или $c = a - 1$.

Итого есть 4 пары $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(31; 39; 30)$, $(31; 39; 40)$, $(-32; -24; -23)$, $(-32; -24; -33)$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

Ответ: $5\sqrt[4]{3}$.



Решение. Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все её боковые грани имели бы равные площади. Так как в основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 5, его сторона равна $a = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 6. Эти грани имеют равные площади, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1M и A_1K этих граней равны между собой. Пусть AA' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC . Рассмотрим два возможных случая.

1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC . По теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, то есть грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что $5 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 6$ – противоречие. Значит, этот случай невозможен.

2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC . Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{5}{a} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$. Так как площадь основания призмы равна 4, её объём есть $5\sqrt{3}$. Несложно понять, что такая призма существует.

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x , при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

Ответ: $x = -5, x = 3$.

Решение. Пусть b_1, b_2, b_3, \dots – данная геометрическая прогрессия, а q – её знаменатель. Тогда $b_7 = b_1q^6$, $b_{13} = b_1q^{12}$, $b_{15} = b_1q^{14}$, откуда следует, что $b_{13}^4 = b_{15}^3b_7$, а b_7, b_{13} и b_{15} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(5-x)^4 = \left(\sqrt{(13x-35)(x+1)}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}},$$

что на ОДЗ равносильно уравнению $(5-x)^4 = (13x-35)^2$. Решаем его:

$$(x^2 - 10x + 25)^2 = (13x - 35)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 25 = 13x - 35, \\ x^2 - 10x + 25 = 35 - 13x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = 20, \\ x = -5, \\ x = 2. \end{cases}$$

Значение $x = 2$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x = 20$ не подходит, так как при этом $b_7 > 0$, $b_{13} < 0$, $b_{15} > 0$, что невозможно.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x-z} + 5 = 2\sqrt{y+x-x^2+z}, \\ |y+1| + 3|y-12| = \sqrt{169-z^2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right), \left(\frac{1}{2} - \sqrt{10}; 12; 0\right)$.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y , а правая только от z . Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z) = \sqrt{169-z^2}$ является отрезок $[0; 13]$. Пусть $h(y) = |y+1| + 3|y-12|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y . В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскроется второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y \geq 12$ и убывает при $y \leq 12$. Отсюда следует, что $y = 12$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(12) = 13$. Поскольку $\min h(y) = \max f(z) = 13$, из второго уравнения находим, что $f(z) = 13 \Leftrightarrow z = 0$ и $h(y) = 13 \Leftrightarrow y = 12$.

Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{4-x} + 5 = 2\sqrt{12+x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+3} - \sqrt{4-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+3 - 2\sqrt{(x+3)(4-x)} + 4-x$, откуда $2\sqrt{12+x-x^2} = 7-t^2$. Уравнение принимает вид $t+5 = 7-t^2$. Решая его, находим

$t = 1$ или $t = -2$.

- Если $t = 1$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} = \sqrt{4-x} + 1 &\Leftrightarrow x+3 = 4-x + 2\sqrt{4-x} + 1 \Leftrightarrow x-1 = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 4-x, \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

- Аналогично рассматриваем второе значение $t = -2$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} + 2 = \sqrt{4-x} &\Leftrightarrow x+3 + 4\sqrt{x+3} + 4 = 4-x \Leftrightarrow 4\sqrt{x+3} = -2x-3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 16(x+3) = (-2x-3)^2, \\ -2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{10}, \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} - \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Итак, система имеет два решения: $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 12; 0\right)$ и $\left(\frac{1}{2} - \sqrt{10}; 12; 0\right)$.

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p , при которых уравнение

$$\cos 3x + 3 \cos 2x + 6 \cos x = p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p .

Ответ: Решения есть при $p \in [-4; 10]$.

Они задаются формулой $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Применяя формулы $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$, $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ и обозначая $\cos x = t$, приводим уравнение к виду $8t^3 + 12t^2 + 6t = 2p + 6$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(2t+1)^3 = 2p+7$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно следующему: $2t+1 = \sqrt[3]{2p+7} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$.

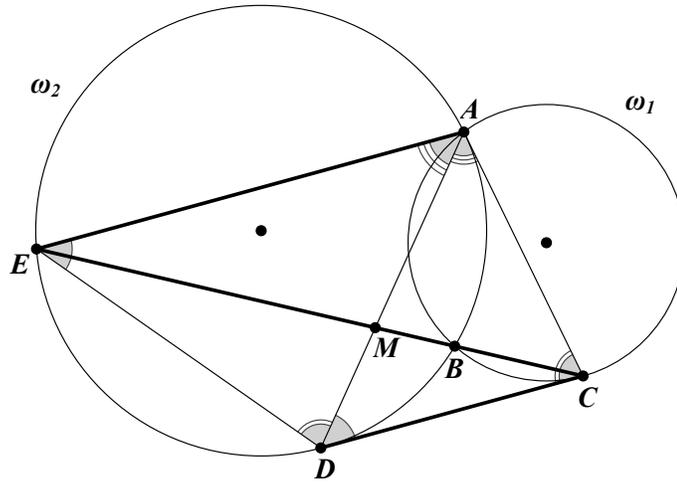
Ввиду ограниченности косинуса, отсюда получаем неравенства

$$\left| \frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2} \right| \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sqrt[3]{2p+7}-1 \leq 2 \Leftrightarrow -4 \leq p \leq 10.$$

При этих значениях p уравнение $\cos x = \frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$ имеет решения $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B , а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD , чем точка A . Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E . Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3 : 10$, считая от вершины C .

Ответ: $\sqrt{\frac{10}{3}}$.



Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD . По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD . Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$. Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180^\circ$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окружность и опирается на дугу AC , не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (то есть AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$. Отсюда можно выразить, что $(\frac{ED}{CD})^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}$. Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDE$ через M . Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE . По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250 . Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $3 \cdot C_{25\,000}^4 - 2 \cdot C_{12\,500}^2$.

Решение. Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки ℓ_1 и ℓ_2 – его средние линии (для определённости считаем, что средняя линия ℓ_1 горизонтальна, а ℓ_2 – вертикальна). Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно ℓ_1 через A_1 , относительно ℓ_2 – через A_2 , относительно O – через B . Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1 , достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше ℓ_1), после чего клетки в нижней половине получаются симметрией четырёх выбранных клеток относительно ℓ_1 . Так как в верхней половине прямоугольника всего 25 000 клеток, $|A_1| = C_{25\,000}^4$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить,

выбрав 4 клетки из 25 000 в левой половине прямоугольника (нужно отразить их относительно ℓ_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C_{25\,000}^4$.

Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|$. Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше ℓ_1 и левее ℓ_2). Отражая две клетки относительно ℓ_1 , получаем множество из четырёх закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно ℓ_2 , получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C_{12\,500}^2$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = C_{12\,500}^2$, $|A_2 \cap B| = C_{12\,500}^2$, $|A_1 \cap B| = C_{12\,500}^2$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3 \cdot C_{12\,500}^2 - 2 \cdot C_{12\,500}^2$.

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

Ответ: $(31; 23; 22)$, $(31; 23; 32)$, $(-16; -24; -25)$, $(-16; -24; -15)$.

Решение. Так как $(a - c)(b - c) = p^2$, где p – простое, а $a - c > b - c$ (за счёт того, что $a > b$), возможны следующие два варианта:

$$\begin{cases} b - c = 1, \\ a - c = p^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} b - c = -p^2, \\ a - c = -1. \end{cases} \quad (*)$$

Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $a - b = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:

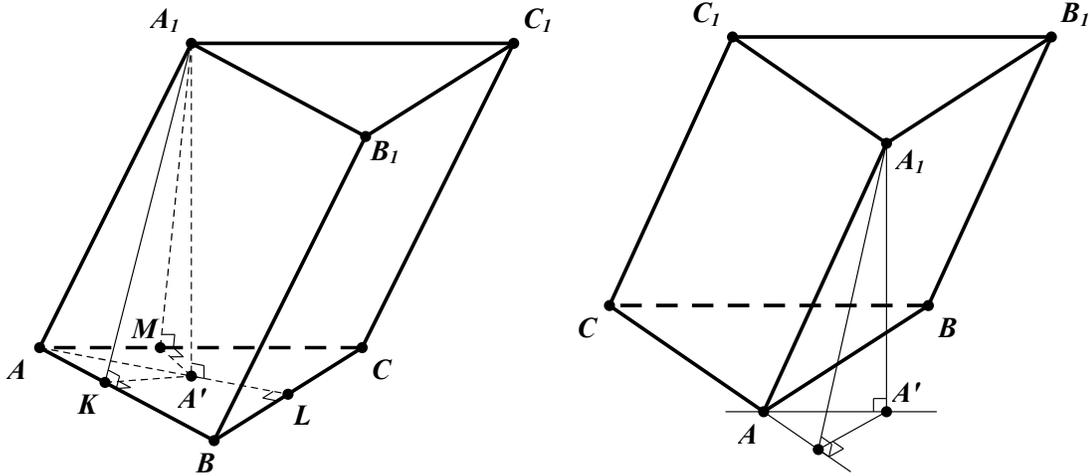
- $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3(3k^2 + 2k)$ – делится на 3;
- $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3(3k^2 + 4k + 1)$ – также делится на 3;
- $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$, и делимость на 3 отсутствует.

Поскольку число $a - b$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $a - b = 8$. Добавляя сюда уравнение $a + b^2 = 560$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b . Решая её, находим $a = 31$, $b = 23$ или $a = -16$, $b = -24$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c . Это $c = a - p^2 = a - 9$ или $c = a + 1$.

Итого есть 4 пары $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(31; 23; 22)$, $(31; 23; 32)$, $(-16; -24; -25)$, $(-16; -24; -15)$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

Ответ: 3.



Решение. Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все её боковые грани имели бы равные площади. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 4. Эти грани имеют равные площади, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1M и A_1K этих граней равны между собой. Пусть AA' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC . Рассмотрим два возможных случая.

- 1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC . По теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, то есть грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что $3 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 4$ – противоречие ($a = 1$ – ребро основания призмы). Значит, этот случай невозможен.
- 2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC . Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{3}{a} = 3$. Несложно понять, что такая призма существует.

10 КЛАСС. Вариант 5

1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x + 3$, пятый член равен $(x^2 + 2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x .

Ответ: $x = -1, x = -1 \pm \sqrt{3}$.

Решение. Числа A, B, C являются третьим, пятым и девятым членами арифметической прогрессии соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B = 2A + C$ ($a_5 = a_3 + 2d, a_9 = a_3 + 6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3(x^2 + 2x)^2 = 3x^2 + 2(3x + 3)$. Сделав замену $t = x^2 + 2x$, получаем $3t^2 = 3t + 6 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$. Данное уравнение имеет корни $t = -1$ и $t = 2$. Далее находим значения x :

$$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0, \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ x = -1 \pm \sqrt{3}. \end{cases}$$

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y + 8x$ при условии $\begin{cases} |x - 3y| \leq 3, \\ |3x - y| \leq 1. \end{cases}$

Ответ: 11.

Решение. Данная система неравенств эквивалентна следующим:

$$\begin{cases} -3 \leq x - 3y \leq 3, \\ -1 \leq 3x - y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} - 1 \leq y \leq \frac{x}{3} + 1, \\ 3x - 1 \leq y \leq 3x + 1. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт полосу между параллельными прямыми $y = \frac{x}{3} - 1$ и $y = \frac{x}{3} + 1$, а второе – полосу между прямыми $y = 3x - 1$ и $y = 3x + 1$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0; -1), Q(-\frac{3}{4}; -\frac{5}{4}), R(0; 1), S(\frac{3}{4}; \frac{5}{4})$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).

Рассмотрим уравнение $4y + 8x = C$, где C – некоторая константа. Оно задаёт прямую на плоскости, причём в любой точке прямой значение выражения $4y + 8x$ постоянно и равно C . Если изменить значение C , получится некоторая другая прямая, на которой выражение $4y + 8x$ принимает новое значение. Нам необходимо определить максимальное значение C , при котором прямая $4y + 8x = C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, и самое большое C получается, когда прямая проходит через точку S . Это значение равно $4 \cdot \frac{3}{4} + 8 \cdot \frac{5}{4} = 11$.

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 2mn + n^2 - 9m - 9n$ и $B = m^2n + mn^2 - 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

Ответ: $(3; 10), (10; 3)$.

Решение. Число A представимо в виде $A = (m+n)(m+n-9)$. Так как множители имеют разную чётность, A – чётное число. Рассмотрим два случая.

- Если $A = 75q^2$, то так как A чётное, q также должно быть чётным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q = 2$. Отсюда получаем $(m+n)^2 - 9(m+n) - 300 = 0$. Это уравнение является квадратным относительно $m+n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.

- Следовательно, $A = 13p^2$, и тогда по условию $B = 75q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что

$p = 2$. Тогда $(m + n)^2 - 9(m + n) - 52 = 0$, откуда $m + n = -4$ или $m + n = 13$. Подходит только $m + n = 13$, так как числа m и n положительны. Перейдём ко второму равенству

$$mn(m + n) - 3mn = 75q^2.$$

Так как $m + n = 13$, оно упрощается и принимает вид $2mn = 15q^2$. Отсюда q – чётное число, поэтому $q = 2$. Итак, числа m и n удовлетворяют системе

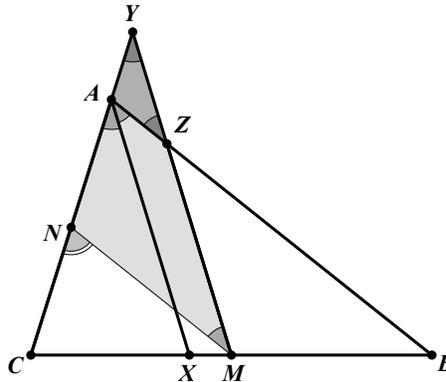
$$\begin{cases} m + n = 13, \\ mn = 30. \end{cases}$$

Её решениями являются пары чисел $(3; 10)$, $(10; 3)$.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

Ответ: $BC = 8\sqrt{21}$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAH = \angle CAH = \alpha$; за счёт параллельности AH и MY получаем $\angle AYZ = \angle CAH = \alpha$, $\angle AZY = \angle BAH = \alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC , параллельная стороне AB . Тогда $\angle NMY = \angle AZY = \alpha$. В треугольниках MNY и AZY есть по два угла, равных α . Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AZY находим, что $\cos \alpha = \frac{YZ}{2 \cdot AZ} = \frac{2}{3}$.



Заметим также, что $\angle CNM = 2\alpha$ (внешний угол треугольника MNY), $CN = \frac{1}{2}AC = 9$; $MN = NY = AN + AY = \frac{AC}{2} + AZ = 15$. Кроме того, $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2 = MN^2 + CN^2 - 2MN \cdot CN \cdot \cos 2\alpha = 336.$$

Отсюда $BC = 2MC = 8\sqrt{21}$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде $x^4 + 5x^2 + \sqrt{x} = y^4 + 5y^2 + \sqrt{y}$. Введя функцию $f(t) = t^4 + 5t^2 + \sqrt{t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x) = f(y)$. Функция f строго

возрастает на всей своей области определения (как сумма трёх возрастающих при $t \geq 0$ функций). Отсюда следует, что каждое своё значение она принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+1 - 2\sqrt{(x+1)(6-x)} + 6-x$, откуда $2\sqrt{6+5x-x^2} = 7-t^2$. Уравнение принимает вид $t+5 = 7-t^2$. Решая его, находим $t = -2$ или $t = 1$. Если $t = 1$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{6-x} + 1 = \sqrt{x+1} &\Leftrightarrow 6-x + 2\sqrt{6-x} + 1 = x+1 \Leftrightarrow \sqrt{6-x} = x-3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 6-x = (x-3)^2, \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}. \end{aligned}$$

Если $t = -2$, то $\sqrt{x+1} + 2 = \sqrt{6-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geq 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{1}+2$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{6}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}, \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$.

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

Ответ: 820.

Решение. Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

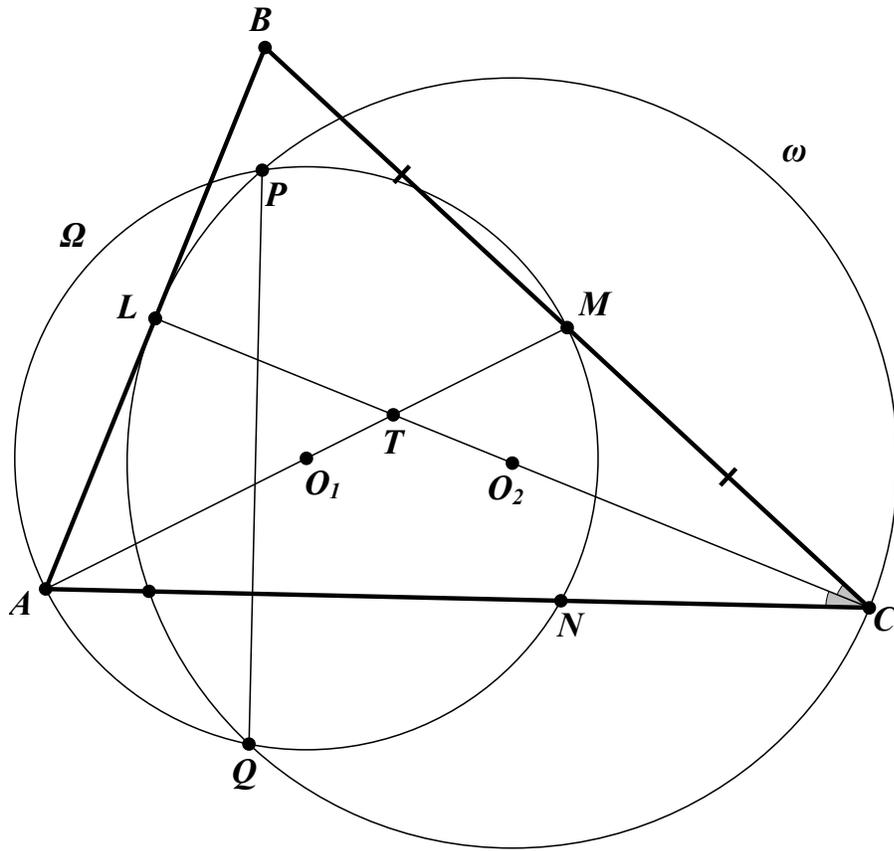
- В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
- В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на 180° , но не на 90° т. е. все такие раскраски разбиваются на пары считающихся одинаковыми. Во втором же случае совмещение с самой собой при поворотах на 90° , 180° и 270° не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а всё множество раскрасок во втором случае разбивается на четвёрки считающихся одинаковыми.

В первом случае количество раскрасок равно $\frac{81-1}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, не являющийся центральным, и тогда симметричный ему узел определён однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{81}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю, т. е. $C_{81}^2 - \frac{81-1}{2}$. В итоге получаем, что количество раскрасок равно $\frac{1}{4} \left(C_{81}^2 - \frac{81-1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{81-1}{2}\right) = 820$.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 10$, $AN = 8$.

Ответ: $AC = BC = 8 + \sqrt{14}$.



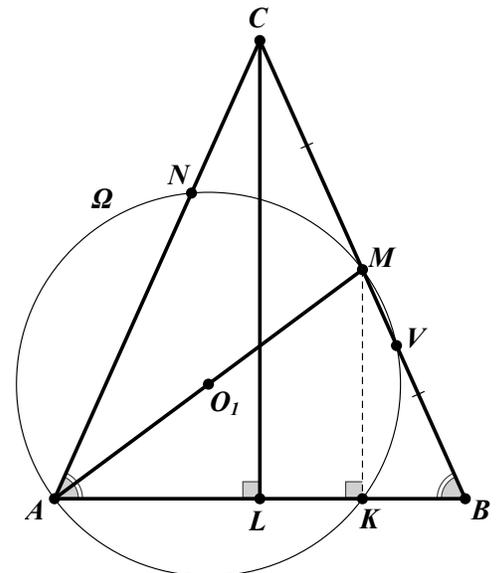
Решение. Пусть T – точка пересечения AM и CL , O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно. Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам. Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда $TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL , $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$, и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB , отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K , а сторону BC вторично пересекает в точке V . Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL . Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = \frac{5}{2}$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда $CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем

$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \Leftrightarrow (c+t) \cdot c = (2c-8) \cdot 2c;$$

$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \Leftrightarrow (c-t) \cdot c = \frac{5}{2} \cdot 10.$$

Из первого равенства следует, что $t = 3c - 16$. Подставляя во второе равенство, имеем $(16-2c) \cdot c = 25 \Leftrightarrow c = \frac{8 \pm \sqrt{14}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 8 \pm \sqrt{14}$. Но так как $AC > AN = 8$, подходит только $BC = AC = 8 + \sqrt{14}$.



10 КЛАСС. Вариант 6

1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12 - 12x$, четвёртый член равен $(x^2 + 4x)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x .

Ответ: $x = -2, x = -2 \pm \sqrt{6}$.

Решение. Числа A, B, C являются вторым, четвёртым и восьмым членами арифметической прогрессии соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B = 2A + C$ ($a_4 = a_2 + 2d, a_8 = a_2 + 6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3(x^2 + 4x)^2 = -6x^2 + 2(12 - 12x)$. Сделав замену $t = x^2 - 4x$, получаем $3t^2 = -6t + 24 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0$. Данное уравнение имеет корни $t = -4$ и $t = 2$. Далее находим значения x :

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 0, \\ x^2 + 4x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2, \\ x = -2 \pm \sqrt{6}. \end{cases}$$

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x + 5y$ при условии $\begin{cases} |2x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 2y| \leq 4. \end{cases}$

Ответ: -74 .

Решение. Данная система неравенств эквивалентна следующим:

$$\begin{cases} -6 \leq 2x - 3y \leq 6, \\ -4 \leq 3x - 2y \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{3} - 2 \leq y \leq \frac{2x}{3} + 2, \\ \frac{3x}{2} - 2 \leq y \leq \frac{3x}{2} + 2. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт полосу между параллельными прямыми $y = \frac{2x}{3} - 2$ и $y = \frac{2x}{3} + 2$, а второе – полосу между прямыми $y = \frac{3x}{2} - 2$ и $y = \frac{3x}{2} + 2$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0; -2), Q(-\frac{24}{5}; -\frac{26}{5}), R(0; 2), S(\frac{24}{5}; \frac{26}{5})$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).

Рассмотрим уравнение $10x + 5y = C$, где C – некоторая константа. Оно задаёт прямую на плоскости, причём в любой точке прямой значение выражения $10x + 5y$ постоянно и равно C . Если изменить значение C , получится некоторая другая прямая, на которой выражение $10x + 5y$ принимает новое значение. Нам необходимо определить минимальное значение C , при котором прямая $10x + 5y = C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, и самое маленькое C получается, когда прямая проходит через точку Q . Это значение равно $10 \cdot (-\frac{24}{5}) + 5 \cdot (-\frac{26}{5}) = -74$.

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 4mn + 4n^2 + 13m - 26n$ и $B = m^2n - 2mn^2 - 2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q – простые числа.

Ответ: $(10; 3)$.

Решение. Число A представимо в виде $A = (m - 2n)(m - 2n + 13)$. Так как множители имеют разную чётность, A – чётное число. Рассмотрим два случая.

Если $A = 15q^2$, то так как A чётное, q также должно быть чётным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q = 2$. Отсюда получаем $(m - 2n)^2 + 13(m - 2n) - 60 = 0$. Это уравнение является квадратным относительно $m - 2n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.

Следовательно, $A = 17p^2$, и тогда по условию $B = 15q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что

$p = 2$. Тогда $(m - 2n)^2 + 13(m - 2n) - 68 = 0$, откуда $m - 2n = -17$ или $m - n = 4$. Перейдём ко второму равенству

$$mn(m - 2n) - 2mn = 15q^2.$$

Если $m - 2n = -17$, то $-19mn = 15q^2$, что невозможно, так как левая часть отрицательна, а правая – положительна. Если $m - 2n = 4$, то $2mn = 15q^2$. Отсюда $q = 2$ (так как q – простое). Итак, числа m и n удовлетворяют системе

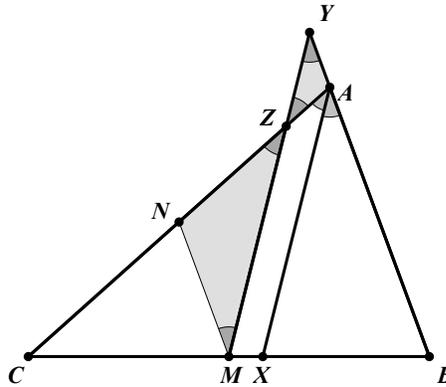
$$\begin{cases} m - n = 4, \\ mn = 30. \end{cases}$$

Её решениями являются пары чисел $(10; 3)$, $(-6; -5)$. Так как m и n натуральные, подходит только первая из этих двух пар.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

Ответ: $BC = 8\sqrt{6}$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAH = \angle CAH = \alpha$; за счёт параллельности AH и MY получаем $\angle AYZ = \angle BAH = \alpha$, $\angle AZY = \angle CAH = \alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC , параллельная стороне AB . Тогда $\angle NMY = \angle BYM = \alpha$. В треугольниках MNZ и AZY есть по два угла, равных α . Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AZY находим, что $\cos \alpha = \frac{YZ}{2 \cdot AZ} = \frac{2}{3}$.



Заметим также, что $\angle CNM = 2\alpha$ (внешний угол треугольника MNZ), $CN = \frac{1}{2}AC = 9$; $MN = NZ = AN - AZ = \frac{AC}{2} - AZ = 3$. Кроме того, $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2 = MN^2 + CN^2 - 2MN \cdot CN \cdot \cos 2\alpha = 96.$$

Отсюда $BC = 2MC = 8\sqrt{6}$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12-x-y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$.

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде $2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x} = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt[4]{3y}$. Введя функцию $f(t) = 2t^5 + 4t^2 + \sqrt[4]{3t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x) = f(y)$. Функция

f строго возрастает на всей своей области определения (как сумма трёх возрастающих при $t \geq 0$ функций). Отсюда следует, что каждое своё значение она принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12-x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+4 - 2\sqrt{(x+4)(3-x)} + 3-x$, откуда $2\sqrt{12-x-x^2} = 7-t^2$. Уравнение принимает вид $t+5 = 7-t^2$. Решая его, находим $t = -2$ или $t = 1$. Если $t = 1$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{3-x} + 1 = \sqrt{x+4} &\Leftrightarrow 3-x + 2\sqrt{3-x} + 1 = x+4 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = x \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = x^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}. \end{aligned}$$

Если $t = -2$, то $\sqrt{x+4} + 2 = \sqrt{3-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geq 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{4}+2$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{3}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$.

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

Ответ: 512.

Решение. Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

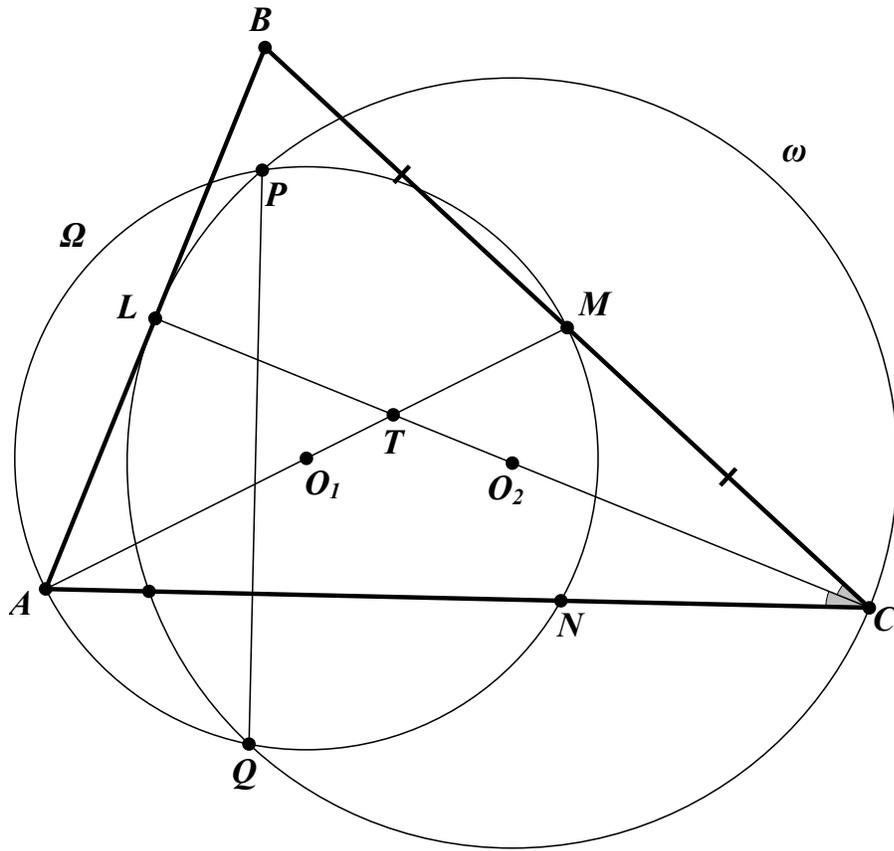
- В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
- В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на 180° , но не на 90° т. е. все такие раскраски разбиваются на пары считающихся одинаковыми. Во втором случае совмещение с самой собой при поворотах на 90° , 180° и 270° не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а всё множество раскрасок во втором случае разбивается на четвёрки считающихся одинаковыми.

В первом случае количество раскрасок равно $\frac{64}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, и тогда симметричный ему узел определён однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{64}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю, т. е. $C_{64}^2 - \frac{64}{2}$. В итоге получаем, что количество раскрасок равно $\frac{1}{4} \cdot \left(C_{64}^2 - \frac{64}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{64}{2} = 512$.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 6$, $AN = 5$.

Ответ: $AC = BC = 5 + \sqrt{7}$.



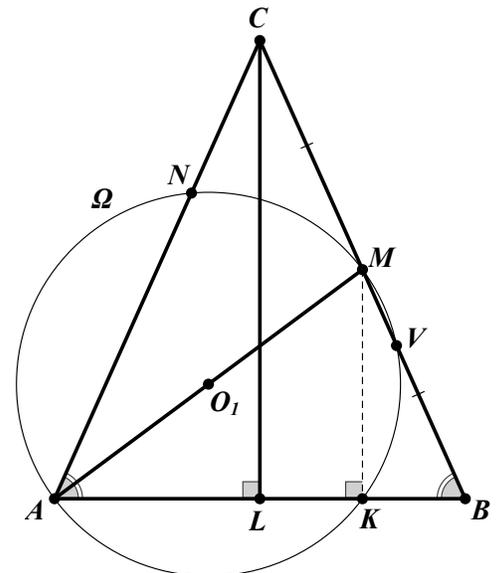
Решение. Пусть T – точка пересечения AM и CL , O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно. Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам. Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда $TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL , $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$, и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB , отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K , а сторону BC вторично пересекает в точке V . Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL . Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = \frac{3}{2}$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда $CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем

$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \Leftrightarrow (c+t) \cdot c = (2c-5) \cdot 2c;$$

$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \Leftrightarrow (c-t) \cdot c = \frac{3}{2} \cdot 6.$$

Из первого равенства следует, что $t = 3c - 16$. Подставляя во второе равенство, имеем $(10 - 2c) \cdot c = 9 \Leftrightarrow c = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 5 \pm \sqrt{7}$. Но так как $AC > AN = 5$, подходит только $BC = AC = 5 + \sqrt{7}$.



10 КЛАСС. Вариант 7

1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6 - 9x$, шестой член равен $(x^2 - 2x)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x .

Ответ: $x = 1, x = 1 \pm \sqrt{5}$.

Решение. Числа A, B, C являются четвёртым, шестым и десятым членами арифметической прогрессии соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B = 2A + C$ ($a_6 = a_4 + 2d$, $a_{10} = a_4 + 6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3(x^2 - 2x)^2 = 9x^2 + 2(6 - 9x)$. Сделав замену $t = x^2 - 2x$, получаем $3t^2 = 9t + 12 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$. Данное уравнение имеет корни $t = 4$ и $t = -1$. Далее находим значения x :

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 4 = 0, \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = 1 \pm \sqrt{5}. \end{cases}$$

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y + 6x$ при условии $\begin{cases} |x - 2y| \leq 2 \\ |2x - y| \leq 1. \end{cases}$

Ответ: 13.

Решение. Данная система неравенств эквивалентна следующим:

$$\begin{cases} -2 \leq x - 2y \leq 2, \\ -1 \leq x - 2y \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} - 1 \leq y \leq \frac{x}{2} + 1, \\ 2x - 1 \leq y \leq 2x + 1. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт полосу между параллельными прямыми $y = \frac{x}{2} - 1$ и $y = \frac{x}{2} + 1$, а второе – полосу между прямыми $y = 2x - 1$ и $y = 2x + 1$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0; -1)$, $Q(-\frac{4}{3}; -\frac{5}{3})$, $R(0; 1)$, $S(\frac{4}{3}; \frac{5}{3})$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).

Рассмотрим уравнение $3y + 6x = C$, где C – некоторая константа. Оно задаёт прямую на плоскости, причём в любой точке прямой значение выражения $3y + 6x$ постоянно и равно C . Если изменить значение C , получится некоторая другая прямая, на которой выражение $3y + 6x$ принимает новое значение. Нам необходимо определить максимальное значение C , при котором прямая $3y + 6x = C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, и самое большое C получается, когда прямая проходит через точку S . Это значение равно $3 \cdot \frac{5}{3} + 6 \cdot \frac{4}{3} = 13$.

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 + 4mn + 4n^2 - 7m - 14n$ и $B = m^2n + 2mn^2 + 9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

Ответ: $(5; 3)$.

Решение. Число A представимо в виде $A = (m + 2n)(m + 2n - 7)$. Так как множители имеют разную чётность, A – чётное число. Рассмотрим два случая.

Если $A = 75q^2$, то так как A чётное, q также должно быть чётным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q = 2$. Отсюда получаем $(m + 2n)^2 - 7(m + 2n) - 300 = 0$. Это уравнение является квадратным относительно $m + 2n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.

Следовательно, $A = 11p^2$, и тогда по условию $B = 75q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что

$p = 2$. Тогда $(m + 2n)^2 - 7(m + 2n) - 44 = 0$, откуда $m + 2n = -4$ или $m + 2n = 11$. Подходит только $m + 2n = 11$, так как числа m и n положительны. Перейдём ко второму равенству

$$mn(m + 2n) + 9mn = 75q^2.$$

Так как $m + 2n = 11$, оно упрощается и принимает вид $4mn = 15q^2$. Отсюда q – чётное число, поэтому $q = 2$. Итак, числа m и n удовлетворяют системе

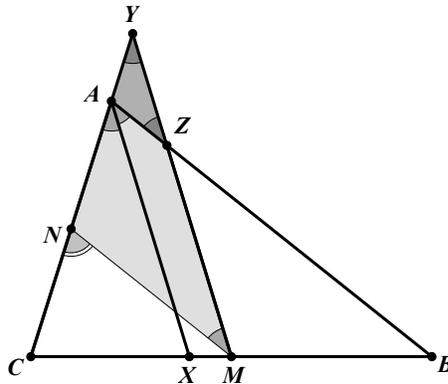
$$\begin{cases} m + 2n = 11, \\ mn = 15. \end{cases}$$

Её решениями являются пары чисел $(5; 3)$, $(6; \frac{5}{2})$. Так как m и n натуральные, подходит только первая из этих двух пар.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 6$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

Ответ: $BC = 14$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAH = \angle CAH = \alpha$; за счёт параллельности AH и MY получаем $\angle AYZ = \angle CAH = \alpha$, $\angle AZY = \angle BAH = \alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC , параллельная стороне AB . Тогда $\angle NMY = \angle AZY = \alpha$. В треугольниках MNY и AZY есть по два угла, равных α . Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AZY находим, что $\cos \alpha = \frac{YZ}{2 \cdot AZ} = \frac{2}{3}$.



Заметим также, что $\angle CNM = 2\alpha$ (внешний угол треугольника MNY), $CN = \frac{1}{2}AC = 3$; $MN = NY = AN + AY = \frac{AC}{2} + AZ = 6$. Кроме того, $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2 = MN^2 + CN^2 - 2MN \cdot CN \cdot \cos 2\alpha = 49.$$

Отсюда $BC = 2MC = 14$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{7-y} + 7 = 2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3 + 3x - \sqrt{2y} = y^3 - \sqrt{2x} + 3y. \end{cases}$$

Ответ: $(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2})$.

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде $x^3 + 3x + \sqrt{2x} = y^3 + 3y + \sqrt{2y}$. Введя функцию $f(t) = t^3 + 3t + \sqrt{2t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x) = f(y)$. Функция f строго

возрастает на всей своей области определения (как сумма трёх возрастающих при $t \geq 0$ функций). Отсюда следует, что каждое своё значение она принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+2 - 2\sqrt{(x+2)(7-x)} + 7-x$, откуда $2\sqrt{14+5x-x^2} = 9-t^2$. Уравнение принимает вид $t+7 = 9-t^2$. Решая его, находим $t = -2$ или $t = 1$. Если $t = 1$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{7-x} + 1 = \sqrt{x+2} &\Leftrightarrow 7-x + 2\sqrt{7-x} + 1 = x+2 \Leftrightarrow \sqrt{7-x} = x-3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 7-x = (x-3)^2, \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}, \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}. \end{aligned}$$

Если $t = -2$, то $\sqrt{x+2} + 2 = \sqrt{7-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geq 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{2}+2$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{7}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$.

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

Ответ: 1 830.

Решение. Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

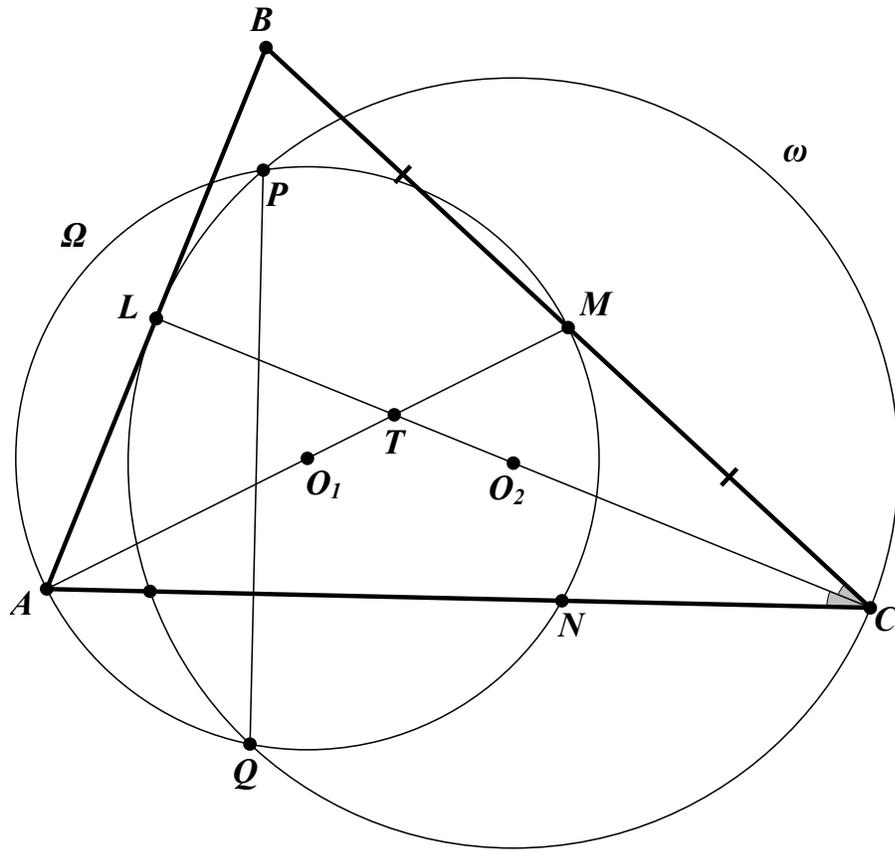
- В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
- В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на 180° , но не на 90° т. е. все такие раскраски разбиваются на пары считающихся одинаковыми. Во втором же случае совмещение с самой собой при поворотах на 90° , 180° и 270° не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а всё множество раскрасок во втором случае разбивается на четвёрки считающихся одинаковыми.

В первом случае количество раскрасок равно $\frac{121-1}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, не являющийся центральным, и тогда симметричный ему узел определён однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{121}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю, т. е. $C_{121}^2 - \frac{121-1}{2}$. В итоге получаем, что количество раскрасок равно $\frac{1}{4} \left(C_{121}^2 - \frac{121-1}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{121-1}{2}\right) = 1\,830$.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 4$, $AN = 5$.

Ответ: $AC = BC = 5 + \sqrt{17}$.



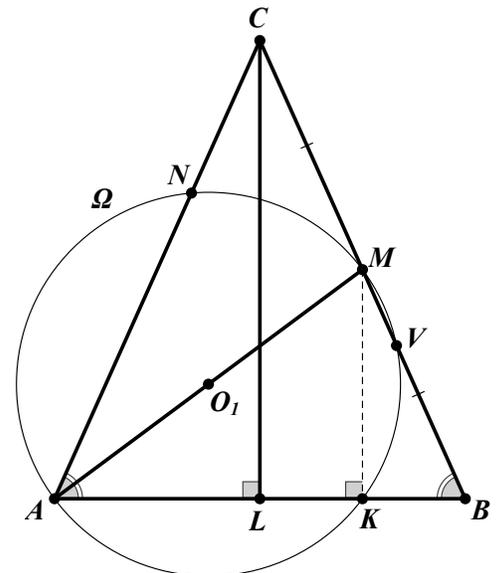
Решение. Пусть T – точка пересечения AM и CL , O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно. Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам. Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда $TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL , $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$, и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB , отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K , а сторону BC вторично пересекает в точке V . Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL . Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = 1$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда $CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем

$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \Leftrightarrow (c+t) \cdot c = (2c-5) \cdot 2c;$$

$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \Leftrightarrow (c-t) \cdot c = 1 \cdot 4.$$

Из первого равенства следует, что $t = 3c - 10$. Подставляя во второе равенство, имеем $(10 - 2c) \cdot c = 4 \Leftrightarrow c = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 5 \pm \sqrt{17}$. Но так как $AC > AN = 5$, подходит только $BC = AC = 5 + \sqrt{17}$.



10 КЛАСС. Вариант 8

1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x + 18$, седьмой член равен $(x^2 - 4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x .

Ответ: $x = 2, x = 2 \pm \sqrt{7}$.

Решение. Числа A, B, C являются пятым, седьмым и одиннадцатым членами арифметической прогрессии соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B = 2A + C$ ($a_7 = a_5 + 2d, a_{11} = a_5 + 6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3(x^2 - 4x)^2 = -3x^2 + 2(6x + 18)$. Сделав замену $t = x^2 - 4x$, получаем $3t^2 = -3t + 36 \Leftrightarrow t^2 + t - 12 = 0$. Данное уравнение имеет корни $t = -4$ и $t = 3$. Далее находим значения x :

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0, \\ x^2 - 4x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ x = 2 \pm \sqrt{7}. \end{cases}$$

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x + 7y$ при условии $\begin{cases} |4x - 3y| \leq 6, \\ |3x - 4y| \leq 8. \end{cases}$

Ответ: -146 .

Решение. Данная система неравенств эквивалентна следующим:

$$\begin{cases} -6 \leq 4x - 3y \leq 6, \\ -8 \leq 3x - 4y \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x}{3} - 2 \leq y \leq \frac{4x}{3} + 2, \\ \frac{3x}{4} - 2 \leq y \leq \frac{3x}{4} + 2. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт полосу между параллельными прямыми $y = \frac{4x}{3} - 2$ и $y = \frac{4x}{3} + 2$, а второе – полосу между прямыми $y = \frac{3x}{4} - 2$ и $y = \frac{3x}{4} + 2$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0; -2), Q(-\frac{48}{7}; -\frac{50}{7}), R(0; 2), S(\frac{48}{7}; \frac{50}{7})$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).

Рассмотрим уравнение $14x + 7y = C$, где C – некоторая константа. Оно задаёт прямую на плоскости, причём в любой точке прямой значение выражения $14x + 7y$ постоянно и равно C . Если изменить значение C , получится некоторая другая прямая, на которой выражение $14x + 7y$ принимает новое значение. Нам необходимо определить минимальное значение C , при котором прямая $14x + 7y = C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, и самое маленькое C получается, когда прямая проходит через точку Q . Это значение равно $14 \cdot (-\frac{48}{7}) + 7 \cdot (-\frac{50}{7}) = -146$.

3. [5 баллов] Найдите все пары (m, n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A = m^2 - 2mn + n^2 + 9m - 9n$ и $B = m^2n - mn^2 + 3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.

Ответ: $(7; 3)$.

Решение. Число A представимо в виде $A = (m - n)(m - n + 9)$. Так как множители имеют разную чётность, A – чётное число. Рассмотрим два случая.

Если $A = 3q^2$, то так как A чётное, q также должно быть чётным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q = 2$. Отсюда получаем $(m - n)^2 + 9(m - n) - 12 = 0$. Это уравнение является квадратным относительно $m - n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.

Следовательно, $A = 13p^2$, и тогда по условию $B = 3q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что $p = 2$. Тогда $(m - n)^2 + 9(m - n) - 52 = 0$, откуда $m - n = -13$ или $m - n = 4$. Перейдём ко второму равенству

$$mn(m - n) + 3mn = 3q^2.$$

Если $m - n = -13$, то $-10mn = 3q^2$, что невозможно, так как левая часть отрицательна, а правая – положительна. Если $m - n = 4$, то $7mn = 3q^2$. Отсюда $q = 7$ (так как q – простое). Итак, числа m и n удовлетворяют системе

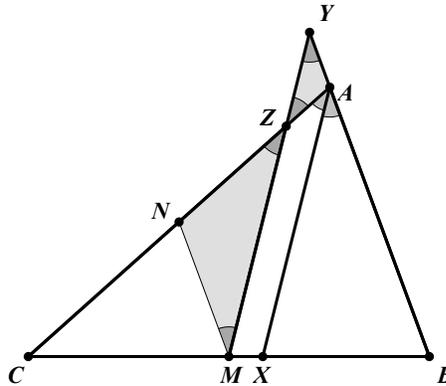
$$\begin{cases} m - n = 4, \\ mn = 21. \end{cases}$$

Её решениями являются пары чисел $(7; 3)$, $(-7; -3)$. Так как m и n натуральные, подходит только первая из этих двух пар.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AH треугольника ABC , проходящая через середину M его стороны BC , пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC , если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

Ответ: $BC = 14$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAH = \angle CAH = \alpha$; за счёт параллельности AH и MY получаем $\angle AYZ = \angle BAH = \alpha$, $\angle AZY = \angle CAH = \alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC , параллельная стороне AB . Тогда $\angle NMY = \angle BYM = \alpha$. В треугольниках MNZ и AZY есть по два угла, равных α . Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AYZ находим, что $\cos \alpha = \frac{YZ}{2 \cdot AZ} = \frac{2}{3}$.



Заметим также, что $\angle CNM = 2\alpha$ (внешний угол треугольника MNZ), $CN = \frac{1}{2}AC = 6$; $MN = NZ = AN - AZ = \frac{AC}{2} - AZ = 3$. Кроме того, $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2 = MN^2 + CN^2 - 2MN \cdot CN \cdot \cos 2\alpha = 49.$$

Отсюда $BC = 2MC = 14$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30-x-y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x+y}. \end{cases}$$

Ответ: $(3\sqrt{2} - \frac{1}{2}; 3\sqrt{2} - \frac{1}{2})$.

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде $4x^4 + x + 5\sqrt[4]{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt[4]{y}$. Введя функцию $f(t) = 4t^4 + t + 5\sqrt[4]{t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x) = f(y)$. Функция f строго

возрастает на всей своей области определения (как сумма трёх возрастающих при $t \geq 0$ функций). Отсюда следует, что каждое своё значение она принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30-x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+6 - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} + 5-x$, откуда $2\sqrt{30-x-x^2} = 11-t^2$. Уравнение принимает вид $t+5 = 11-t^2$. Решая его, находим $t = -3$ или $t = 2$. Если $t = 2$, то

$$\begin{aligned} \sqrt{5-x} + 2 = \sqrt{x+6} &\Leftrightarrow 5-x + 4\sqrt{5-x} + 4 = x+6 \Leftrightarrow 4\sqrt{5-x} = 2x-3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 16(5-x) = (2x-3)^2, \\ 2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{72}}{2}, \\ x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Если $t = -3$, то $\sqrt{x+6} + 3 = \sqrt{5-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geq 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{6}+3$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{5}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $(3\sqrt{2} - \frac{1}{2}; 3\sqrt{2} - \frac{1}{2})$.

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

Ответ: 1 250.

Решение. Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

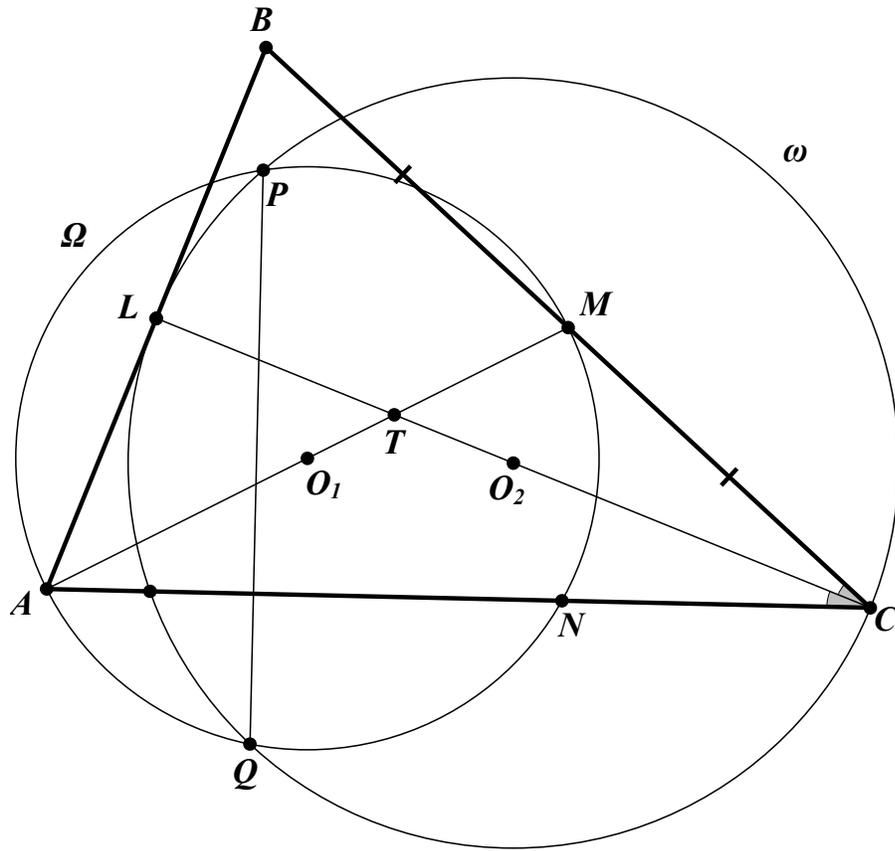
- В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
- В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на 180° , но не на 90° т. е. все такие раскраски разбиваются на пары считающихся одинаковыми. Во втором случае совмещение с самой собой при поворотах на 90° , 180° и 270° не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а всё множество раскрасок во втором случае разбивается на четвёрки считающихся одинаковыми.

В первом случае количество раскрасок равно $\frac{100}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, и тогда симметричный ему узел определён однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{100}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю, т. е. $C_{100}^2 - \frac{100}{2}$. В итоге получаем, что количество раскрасок равно $\frac{1}{4} \cdot (C_{100}^2 - \frac{100}{2}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{2} = 1\,250$.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q . Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC , проведённой из вершины B . Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N . Найдите длины сторон AC и BC , если $AB = 26$, $AN = 20$.

Ответ: $AC = BC = 20 + \sqrt{62}$.



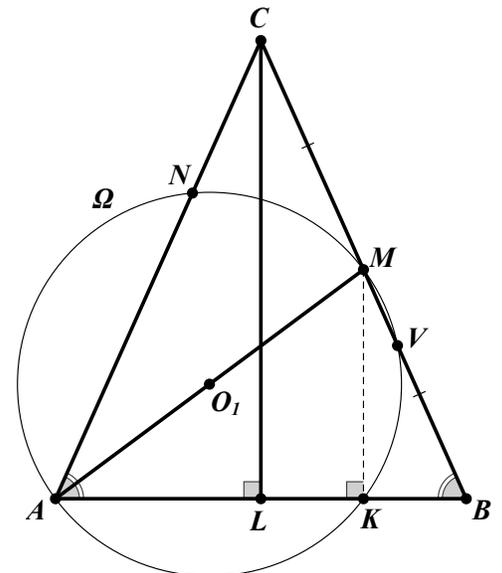
Решение. Пусть T – точка пересечения AM и CL , O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно. Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам. Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда $TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL , $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$, и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB , отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K , а сторону BC вторично пересекает в точке V . Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL . Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = \frac{13}{2}$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда $CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем

$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \Leftrightarrow (c+t) \cdot c = (2c-20) \cdot 2c;$$

$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \Leftrightarrow (c-t) \cdot c = \frac{13}{2} \cdot 26.$$

Из первого равенства следует, что $t = 3c - 40$. Подставляя во второе равенство, имеем $(40 - 2c) \cdot c = 169 \Leftrightarrow c = \frac{20 \pm \sqrt{62}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 20 \pm \sqrt{62}$. Но так как $AC > AN = 20$, подходит только $BC = AC = 20 + \sqrt{62}$.



9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

Ответ: $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

Решение. Для того чтобы у уравнения было два корня, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был положителен. Получаем $D = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$, откуда $t^2 < 4$. По теореме Виета произведение корней равно $4t^2 - 4$. По условию требуется, чтобы оно было положительно, поэтому $4t^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow t^2 > 1$. Значит, $1 < t^2 < 4$, то есть $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .

Ответ: $(4; 36)$.

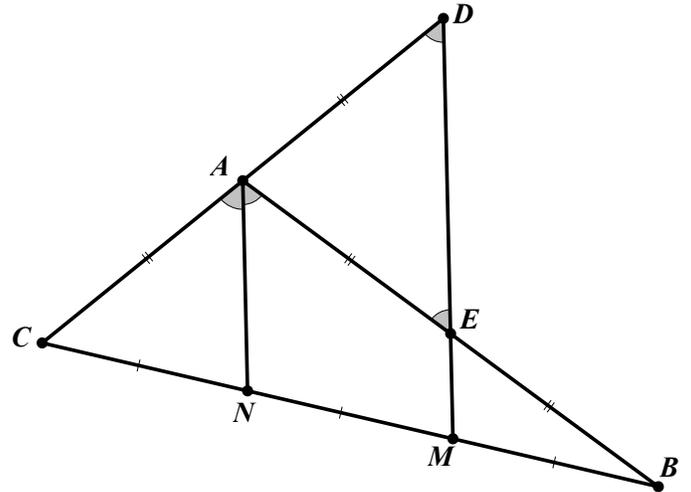
Решение. Данное выражение можно разложить на множители, в результате чего получаем $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a - b)(a - b + 15)$ – произведение чисел разной чётности, следовательно, это число чётное. Так как оно равно $17p^5$, число p также чётное. Но по условию p – простое, значит, $p = 2$. Получаем уравнение $(a - b)^2 + 15(a - b) - 17 \cdot 32 = 0$, которое является квадратным относительно $a - b$. Его решения – это $a - b = -32$ и $a - b = 17$.

Так как в условии задано, что сумма $a + b$ равна 40, а числа $a + b$ и $a - b$ имеют одинаковую чётность, подходит только случай $a - b = -32$. Решая получившуюся систему уравнений, находим, что $a = 4$, $b = 36$.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 12$, $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $AB = 4\sqrt{6}$.

Решение. Пусть E – точка пересечения AB и DM . Поскольку $BM = MN = NC$, а $DM \parallel AN$, по теореме Фалеса $AC = AD$ и $AE = EB$. Из равенства $CD = AB$ следует, что $AC = DA = BE = AE$. Обозначим длину любого из этих отрезков через a . Поскольку $AN \parallel EM$ и треугольник AED – равнобедренный, $\angle CAN = \angle EDA = \angle AED = \angle BAN$, поэтому AN – биссектриса треугольника ABC . Значит, $2\angle CAN = \angle CAB$. В треугольнике ABC имеем $BC = 12$, $CA = a$, $AB = 2a$, $\angle CAB = 2\angle CAN$. По теореме косинусов $144 = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot (-\frac{1}{4}) \Leftrightarrow a^2 = 24$. Следовательно, $AB = 2a = 4\sqrt{6}$.



4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

- он сидит на первой парте в ряду,
- ближайшая парта перед ним пуста,
- за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $\frac{8!}{(3!)^2} = 6720$.

Решение. Первый способ. При любой рассадке учеников в классе одна парта остаётся пустой, а в ряду из подряд стоящих k парт любые k школьников единственным образом могут сесть так, чтобы всем было хорошо видно доску.

Если пустая парта является первой или третьей в каком-либо ряду, то оставшиеся в этом ряду две парты идут подряд, и тогда количество возможных рассадок в классе равно количеству способов разбить 8 человек на три группы: две группы по три человека и одну группу из двух человек. Это количество равно $\frac{8!}{2!(3!)^2}$. (Например, это количество можно получить так: сначала выбираем трёх человек из восьми, чтобы заполнить первый ряд. После этого выбираем ещё трёх человек из оставшихся пяти для второго ряда. Оставшиеся двое садятся за третий ряд без возможности выбора. Отсюда имеем $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!}$.) Суммарно первых и третьих парт шесть, поэтому полученное число надо умножить на 6.

Если пустая парта стоит в каком-либо ряду второй, то при любом расположении любых двух школьников в этом ряду доска им будет видна хорошо. Тогда количество подходящих рассадок вдвое больше, чем в предыдущем случае, и оно равно $\frac{8!}{(3!)^2}$. Вторых парт три, значит, потребуется умножение на 3.

Всего получаем $6 \cdot \frac{8!}{2!(3!)^2} + 3 \cdot \frac{8!}{(3!)^2} = 6 \frac{8!}{(3!)^2} = 6720$ различных рассадок.

Второй способ. При любой рассадке одна парта останется пустой. Ряд, в котором она расположена, выбирается тремя способами. Для каждого из этих трёх случаев между рядами школьники распределяются $C_8^3 \cdot C_5^3$ способами. В ряду с пустой партой любых двух школьников можно четырьмя способами рассадить так, чтобы они оба хорошо видели доску. В остальных рядах рассадка осуществляется единственным способом.

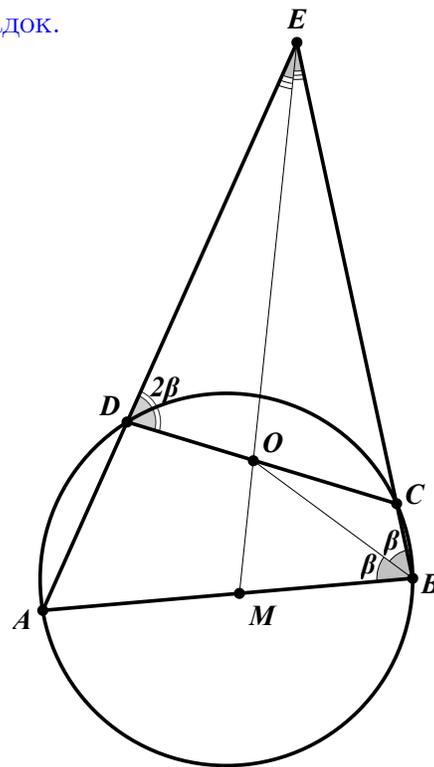
Итого $3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 = 6720$ способов.

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник AEB , лежит на отрезке CD . Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.

Ответ: 10.

Решение. Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов составляет 180° , откуда следует, что $\angle EDO = 180^\circ - \angle ADO = \angle ABC$. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника, поэтому $\angle DEO = \angle BEO$, а точка O лежит на биссектрисе угла B . Пусть биссектриса EO угла AEB пересекает AB в точке M . Треугольники DEO и BEM подобны по двум углам, откуда $\frac{ED}{BE} = \frac{DO}{BM} = \frac{EO}{EM}$. Применяя свойство равных дробей, получаем $\frac{ED+DO}{BE+BM} = \frac{EO}{EM}$, следовательно, $ED + DO = \frac{(BE+BM) \cdot EO}{EM}$.

Известно, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально прилежащим сторонам. Применяя это свойство к треугольнику BEM и биссектрисе BO , получаем



$\frac{BE}{BM} = \frac{EO}{OM}$, откуда $\frac{EO}{EM} = \frac{BE}{BM+BE}$. Окончательно имеем

$$ED + DO = (BE + BM) \cdot \frac{EO}{EM} = (BE + BM) \cdot \frac{BE}{BM + BE} = BE.$$

Таким образом, сумма $ED + DO$ может принимать одно-единственное значение 10.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

Ответ: 17.

Решение. Сформулируем задачу на языке графов. Имеется дерево, у которого есть четыре вершины со степенями 3, 4, 5 и 7, а остальные вершины – висячие (степени 1). Требуется найти количество вершин в этом дереве.

Пусть x – количество висячих вершин. Найдем количество рёбер. С одной стороны, оно равно половине от суммы степеней вершин, то есть $\frac{3+4+5+7+x}{2} = \frac{19+x}{2}$. С другой стороны, количество рёбер в дереве на 1 меньше количества вершин. Так как вершин $x + 4$, то рёбер $x + 3$. Получаем уравнение $\frac{19+x}{2} = x + 3$, откуда находим, что $x = 13$. Значит, в дереве $x + 4 = 17$ вершин.

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

Ответ: (0; 1), (0; 2), (1; 0), (1; 2), (2; 0), (2; 1).

Решение. Поскольку подкоренные выражения должны быть неотрицательными, получаем неравенства

$$\begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 \geq 0, \\ 1 - |x + y - 2| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 2, \\ -1 \leq x + y - 2 \leq 1. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

На плоскости Oxy неравенство (1) задаёт круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке (1;1), а неравенство (2) – полосу между прямыми $x+y = 1$ и $x+y = 3$. На пересечении двух этих множеств расположено 7 точек с целочисленными координатами: (0; 1), (0; 2), (1; 0), (1; 1), (1; 2), (2; 0) и (2; 1). В этом можно убедиться, например, рассматривая все целочисленные точки в круге (а их всего 9) и подставляя их координаты в неравенство (2). Другой способ – нарисовать чертёж.

Подставляя эти пары чисел в уравнение, убеждаемся, что только одна из них – (1; 1) – ему не удовлетворяет. Остальные 6 пар являются решениями.

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t , при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

Ответ: $(-3; -1) \cup (1; 3)$.

Решение. Для того, чтобы у уравнения было два корня, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был положителен. Получаем $D = 32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2 > 0$, откуда $t^2 < 9$. По теореме Виета произведение корней равно $9t^2 - 9$. По условию требуется, чтобы оно было положительно, поэтому $9t^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow t^2 > 1$. Значит, $1 < t^2 < 9$, то есть $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b .

Ответ: $(14; 2)$.

Решение. Данное выражение можно разложить на множители, в результате чего получаем $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a + b)(a + b + 3)$ – произведение чисел разной чётности, следовательно, это число чётное. Так как оно равно $19p^4$, число p также чётное. Но по условию p – простое, значит, $p = 2$. Получаем уравнение $(a + b)^2 + 3(a + b) - 19 \cdot 16 = 0$, которое является квадратным относительно $a + b$. Его решения – это $a + b = -19$ и $a + b = 16$.

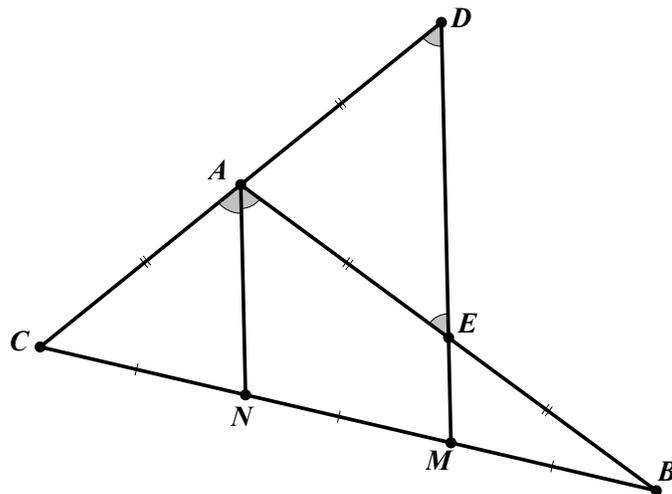
Так как в условии задано, что разность $a - b$ равна 12, а числа $a + b$ и $a - b$ имеют одинаковую чётность, подходит только случай $a + b = 16$. Решая получившуюся систему уравнений, находим, что $a = 14$, $b = 2$.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M , пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D , что $AB = CD$. Найдите AB , если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$.

Решение. Пусть E – точка пересечения AB и DM . Поскольку $BM = MN = NC$, а $DM \parallel AN$, по теореме Фалеса $AC = AD$ и $AE = EB$. Из равенства $CD = AB$ следует, что $AC = DA = BE = AE$. Обозначим длину любого из этих отрезков через a . Поскольку $AN \parallel EM$ и треугольник AED – равнобедренный, $\angle CAN = \angle EDA = \angle AED = \angle BAN$, поэтому AN – биссектриса треугольника ABC . Значит, $2\angle CAN = \angle CAB$.

В треугольнике ABC имеем $BC = 6$, $CA = a$, $AB = 2a$, $\angle CAB = 2\angle CAN$. По теореме косинусов $36 = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow a^2 = 4,5$. Следовательно, $AB = 2a = 3\sqrt{2}$.



4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парты рассчитаны на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

- он сидит на первой парте в ряду,
- ближайшая парта перед ним пуста,
- за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $8 \cdot \frac{11!}{(3!)^3} = 1\,478\,400$.

Решение. Первый способ. При любой рассадке учеников в классе одна парта остаётся пустой, а в ряду из подряд стоящих k парт любые k школьников единственным образом могут сесть так, чтобы всем было хорошо видно доску.

Если пустая парта является первой или третьей в каком-либо ряду, то оставшиеся в этом ряду две парты идут подряд, и тогда количество возможных рассадок в классе равно количеству способов разбить 8 человек на три группы: две группы по три человека и одну группу из двух человек. Это количество равно $\frac{11!}{2! \cdot (3!)^3}$. (Например, это количество можно получить так: сначала выбираем трёх человек из одиннадцати, чтобы заполнить первый ряд. После этого выбираем ещё трёх человек из оставшихся восьми для второго ряда, далее – трёх из пяти. Оставшиеся двое садятся за третий ряд без возможности выбора. Отсюда имеем $C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{11!}{3!8!} \cdot \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!}$.) Суммарно первых и третьих парт восемь, поэтому полученное число надо умножить на 8.

Если пустая парта стоит в каком-либо ряду второй, то при любом расположении любых двух школьников в этом ряду доска им будет видна хорошо. Тогда количество подходящих рассадок вдвое больше, чем в предыдущем случае, и оно равно $\frac{11!}{(3!)^3}$. Вторых парт четыре, значит, потребуется умножение на 4.

Всего получаем $8 \cdot \frac{11!}{2! \cdot (3!)^3} + 4 \cdot \frac{11!}{(3!)^3} = 8 \cdot \frac{11!}{(3!)^3} = 1\,478\,400$ различных рассадок.

Второй способ. При любой рассадке одна парта останется пустой. Ряд, в котором она расположена, выбирается четырьмя способами. Для каждого из этих четырёх случаев между рядами школьники распределяются $C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$ способами. В ряду с пустой партой любых двух школьников можно четырьмя способами рассадить так, чтобы они оба хорошо видели доску. В остальных рядах рассадка осуществляется единственным способом.

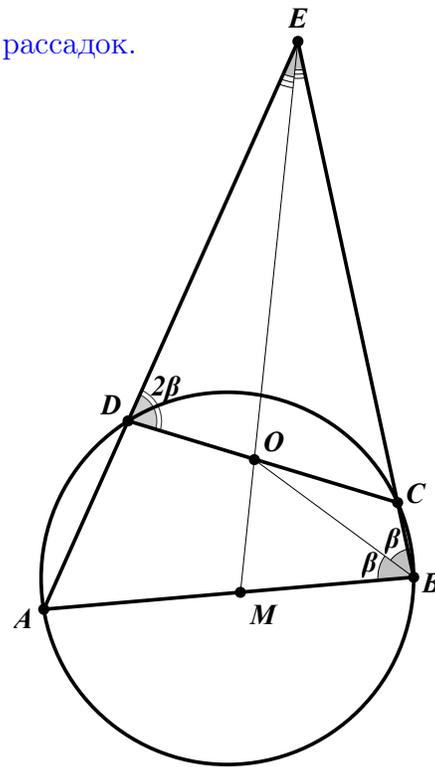
Итого $4 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 = 1\,478\,400$ способов.

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E . Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE , лежит на отрезке CD . Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.

Ответ: 12.

Решение. Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов составляет 180° , откуда следует, что $\angle EDO = 180^\circ - \angle ADO = \angle ABC$. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника, поэтому $\angle DEO = \angle BEO$, а точка O лежит на биссектрисе угла B . Пусть биссектриса EO угла AEB пересекает AB в точке M . Треугольники DEO и BEM подобны по двум углам, откуда $\frac{ED}{BE} = \frac{DO}{BM} = \frac{EO}{EM}$. Применяя свойство равных дробей, получаем $\frac{ED+DO}{BE+BM} = \frac{EO}{EM}$, следовательно, $ED + DO = \frac{(BE+BM) \cdot EO}{EM}$.

Известно, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально прилежащим сторонам. Применяя это свойство к треугольнику BEM и биссектрисе BO , получаем



$\frac{BE}{BM} = \frac{EO}{OM}$, откуда $\frac{EO}{EM} = \frac{BE}{BM+BE}$. Окончательно имеем

$$ED + DO = (BE + BM) \cdot \frac{EO}{EM} = (BE + BM) \cdot \frac{BE}{BM + BE} = BE.$$

Таким образом, сумма $ED + DO$ может принимать одно-единственное значение 12.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

Ответ: 25.

Решение. Сформулируем задачу на языке графов. Имеется дерево, у которого есть четыре вершины со степенями 5, 6, 7 и 9, а остальные вершины – висячие (степени 1). Требуется найти количество вершин в этом дереве.

Пусть x – количество висячих вершин. Найдем количество рёбер. С одной стороны, оно равно половине от суммы степеней вершин, то есть $\frac{5+6+7+9+x}{2} = \frac{27+x}{2}$. С другой стороны, количество рёбер в дереве на 1 меньше количества вершин. Так как вершин $x + 4$, то рёбер $x + 3$. Получаем уравнение $\frac{27+x}{2} = x + 3$, откуда находим, что $x = 21$. Значит, в дереве $x + 4 = 25$ вершин.

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$

Ответ: $(0; -1)$, $(1; 0)$.

Решение. Поскольку подкоренные выражения должны быть неотрицательными, получаем неравенства

$$\begin{cases} 2x - 2y - x^2 - y^2 \geq 0, & \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 2, & (1) \\ 1 - |x - y - 1| \geq 0 & \Leftrightarrow -1 \leq y - x + 1 \leq 1. & (2) \end{cases}$$

На плоскости Oxy неравенство (1) задаёт круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $(1; -1)$, а неравенство (2) – полосу между прямыми $y = x - 2$ и $y = x$. На пересечении двух этих множеств расположено 7 точек с целочисленными координатами: $(0; -2)$, $(0; -1)$, $(0; 0)$, $(1; -1)$, $(1; 0)$, $(2; 0)$ и $(2; 1)$. В этом можно убедиться, например, рассматривая все целочисленные точки в круге (а их всего 9) и подставляя их координаты в неравенство (2). Другой способ – нарисовать чертёж.

Подставляя эти пары чисел в уравнение, убеждаемся, что только две из них – $(1; 0)$ и $(0; -1)$ – ему удовлетворяют. Остальные 4 пары не являются решениями.