

10 класс – день 2

1. а) Дана возрастающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Известно, что $a_3 + a_6 = 23$, $a_6^2 - a_3^2 = 207$. Чему равен девятый член прогрессии?

Ответ: 25.

Решение. Обозначим первый член прогрессии a , а её разность – d . Тогда

$$\begin{cases} a + 5d + a + 2d = 23, \\ (a + 5d)^2 - (a + 2d)^2 = 207; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + 7d = 23, \\ 23 \cdot 3d = 207. \end{cases}$$

Отсюда $d = 3$, $a = 1$, следовательно, $a_9 = a + 8d = 25$.

- б) Дана убывающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Известно, что $a_3 + a_8 = 15$, $a_8^2 - a_3^2 = -75$. Чему равен двенадцатый член прогрессии?

Ответ: 1.

- в) Дана возрастающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Известно, что $a_4 + a_8 = 14$, $a_8^2 - a_4^2 = 56$. Чему равен восемнадцатый член прогрессии?

Ответ: 19.

- г) Дана убывающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Известно, что $a_2 + a_5 = 23$, $a_5^2 - a_2^2 = -225$. Чему равен седьмой член прогрессии?

Ответ: $\frac{2}{23} \approx 0,087$.

- д) Дана возрастающая арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Известно, что $a_2 + a_7 = 16$, $a_7^2 - a_2^2 = 160$. Чему равен одиннадцатый член прогрессии?

Ответ: 21.

2. а) Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k . Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n) = \Pi(n + 1) = \Pi(n + 2) < \Pi(n + 3) = 648$.

Ответ: 89 908.

Решение. Произведения цифр двух последовательных натуральных чисел могут быть равны, только если в записи обоих чисел содержится цифра ноль. Значит, $\Pi(n) = \Pi(n + 1) = \Pi(n + 2) = 0$, $\Pi(n + 3) > 0$. Отсюда следует, что число n оканчивается на 08, а число $n + 3$ – на 11. Так как $648 = 2^3 \cdot 3^4 = 8 \cdot 9 \cdot 9$, то минимально возможное значение $n + 3$ – это 89 911, а минимально возможное значение n есть 89 908.

- б) Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k . Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n) = \Pi(n + 1) = \Pi(n + 2) < \Pi(n + 3) = 360$.

Ответ: 58 908.

- в) Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k . Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n) = \Pi(n + 1) = \Pi(n + 2) < \Pi(n + 3) = 504$.

Ответ: 78 908.

- г) Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k . Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n) = \Pi(n + 1) = \Pi(n + 2) < \Pi(n + 3) = 160$.

Ответ: 45 808.

- д) Пусть $\Pi(k)$ обозначает произведение всех цифр натурального числа k . Найдите наименьшее пятизначное число n такое, что $\Pi(n) = \Pi(n + 1) = \Pi(n + 2) < \Pi(n + 3) = 135$.

Ответ: 35 908.

3. а) 20 школьников записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 13 школьников, на физику – 10 школьников, а 9 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 9 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.

Ответ: 3.

Решение. Пусть x учеников записались на кружки только по информатике и физике, y выбрали только информатику и математику, z – только математику и физику, а t учеников записались на все три кружка. Общее число учеников тем самым равно $(13 - x - y - t) + (10 - x - z - t) + (9 - y - z - t) + x + y + z + t = 20$. По условию $x + y + z + t = 9$. Из полученных уравнений находим, что искомое значение – это $t = 3$.

- б) 28 школьников записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 11 школьников, на физику – 15 школьников, а 14 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 10 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.

Ответ: 2.

- в) 34 школьника записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 14 школьников, на физику – 18 школьников, а 20 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 13 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.

Ответ: 5.

- г) 25 школьников записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 11 школьников, на физику – 14 школьников, а 13 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 10 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.

Ответ: 3.

- д) 32 школьника записываются на кружки по физике, математике и информатике. Каждый школьник может записаться на любое количество из этих трёх кружков, но обязан выбрать хотя бы один из них. Известно, что на информатику записались 14 школьников, на физику – 14 школьников, а 16 человек записались на математику. Оказалось, что ровно 11 человек записались не менее чем на 2 кружка сразу. Найдите количество учеников, выбравших все три кружка.

Ответ: 1.

4. а) Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 70 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 50 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением 40 км/ч². Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.

Ответ: 38,75.

Решение. Будем считать, что вдоль шоссе идёт координатная прямая такая, что пункт A имеет координату 0, а пункт B – координату 70. Тогда спустя t часов координата мотоцикла – это $x_1 = vt = 50t$, а координата машины равна $x_2 = 70 + \frac{at^2}{2} = 70 + 20t^2$. Расстояние между ними равно $|x_2 - x_1| = |70 + 20t^2 - 50t|$. Выражение под модулем – это квадратичная функция; её минимум принимается в точке $t_0 = \frac{5}{4}$, и он равен 38,75. Значит, выражение под модулем положительно при всех t , мотоцикл никогда не догонит машину, а минимальное расстояние между ними будет 38,75 километров.

- б) Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 20 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 30 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением 40 км/ч². Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.

Ответ: 8,75.

- в) Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 45 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 42 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением 48 км/ч². Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.

Ответ: 26,625.

- г) Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 62 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 63 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением 36 км/ч². Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.

Ответ: 6,875.

- д) Пункты A и B находятся на шоссе на расстоянии 52 километров друг от друга. В полдень из пункта A в направлении пункта B выезжает мотоцикл (его движение не заканчивается в пункте B). Он едет с постоянной скоростью 63 км/ч. Одновременно вместе с мотоциклом из пункта B выезжает машина, которая движется *в том же направлении вдоль шоссе, что и мотоцикл*. Машина начинает движение с нулевой скоростью и движется с постоянным ускорением 42 км/ч². Определите наименьшее расстояние между машиной и мотоциклом в первые два часа движения. Ответ выразите в километрах.

Ответ: 4,75.

5. а) В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD , пересекает прямую CD в точке P . Известно, что высота ромба равна 1, а $CP = \frac{9}{2\sqrt{2}}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.

Ответ: 3.

Решение. Пусть $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$, BH – высота ромба, опущенная на сторону AD . Из прямоугольных треугольников ABH и BSP получаем, что $AB = \frac{BH}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha}$, $BC = CP \cos \alpha = \frac{9 \cos \alpha}{2\sqrt{2}}$. Так как стороны ромба равны между собой, получаем уравнение $\frac{9 \cos \alpha}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sin \alpha}$. В силу того что α – острый угол, его синус и косинус положительны, поэтому возводя обе части уравнения в квадрат, получаем эквивалентное исходному уравнение $\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{8}{81}$, откуда $\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \frac{8}{81} = 0$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ или $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Следовательно, $AB = 3$ или $AB = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. По условию AB – целое число, и подходит только первый вариант.

- б) В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD , пересекает прямую CD в точке P . Известно, что высота ромба равна 1, а $CP = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.

Ответ: 2.

- в) В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD , пересекает прямую CD в точке P . Известно, что высота ромба равна 3, а $CP = \frac{16}{\sqrt{7}}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.

Ответ: 4.

- г) В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD , пересекает прямую CD в точке P . Известно, что высота ромба равна 4, а $CP = \frac{25}{3}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.

Ответ: 5.

- д) В ромбе $ABCD$ с острым углом A продолжение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD , пересекает прямую CD в точке P . Известно, что высота ромба равна 3, а $CP = \frac{25}{4}$. Найдите длину стороны ромба, если известно, что это целое число.

Ответ: 5.

6. а) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k , что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 11x = m$ и $x^2 - 2x = k$ имеют два общих корня?

Ответ: 21.

Решение. Домножим второе уравнение на x и вычтем из первого. Получим уравнение $2x^2 + (k - 11)x - m = 0$, которое имеет два общих корня с уравнением $x^2 - 2x - k = 0$. Значит, уравнения пропорциональны, откуда $k = 7$, $m = 14$. Осталось заметить, что при найденных значениях m и k исходные уравнения имеют два общих корня. Значит, $N = 21$.

- б) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k , что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 4x^2 - x = m$ и $x^2 - 2x = k$ имеют два общих корня?

Ответ: -5.

- в) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k , что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - x^2 - 11x = m$ и $x^2 + 2x = k$ имеют два общих корня?

Ответ: -10.

- г) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k , что $N = m + k$, а уравнения $x^3 + 5x^2 - x = m$ и $x^2 + 2x = k$ имеют два общих корня?

Ответ: 28.

- д) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k , что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 4x^2 - x = m$ и $x^2 - 2x = k$ имеют два общих корня?

Ответ: -5.

7. а) Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел

$$x - 2y - 2,5; \quad 2x - y - 3; \quad x^2 - 2x + y^2 + y + 3; \quad x^2 - x + y^2 + 2y + 2,5$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x + y$.

Ответ: -1 .

Решение. Если эти числа обозначить a, b, c, d , то окажется, что $a - b = c - d$. Это означает, что $a = b \Leftrightarrow c = d$, $a = c \Leftrightarrow b = d$. Значит, имеет смысл рассмотреть только два варианта: $a = d$ и $b = c$. Уравнение $b = c$ не имеет решений. Уравнение $a = d$ дает $x^2 - 2x + y^2 + 4y + 5 = 0$. Отсюда находим $x = 1$, $y = -2$. Несложно проверить, что при этом равны между собой только два из четырёх чисел.

- б) Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел

$$y - 2x - 1,5; \quad 2y - x - 2; \quad y^2 - 2y + x^2 + x + 4; \quad y^2 - y + x^2 + 2x + 3,5$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x - y$.

Ответ: -3 .

- в) Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел

$$x - 3y - 5; \quad 3x - y - 5,5; \quad x^2 - 3x + y^2 + y + 5,5; \quad x^2 - x + y^2 + 3y + 5$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x - y$.

Ответ: 4 .

- г) Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел

$$y - 3x - 4; \quad 3y - x - 4,5; \quad y^2 - 3y + x^2 + x + 6,5; \quad y^2 - y + x^2 + 3x + 6$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x - y$.

Ответ: -4 .

- д) Известно, что при некоторых x и y ровно два из четырёх чисел

$$x - 2y - 2,5; \quad 2x - y - 3,5; \quad 2x^2 - 2x + y^2 + y + 3; \quad 2x^2 - x + y^2 + 2y + 2$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $x + y$.

Ответ: $-1,5$.

8. а) В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH . Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 90, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{18}{5}$. Площадь треугольника BHN равна 420, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{42}{5}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Ответ: 13,6.

- б) В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH . Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 120, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{15}{4}$. Площадь треугольника BHN равна 48, а радиус вписанной в него окружности равен 3. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Ответ: 7.

Решение. Треугольники AHM и BHN – равнобедренные с основаниями AH и BH соответственно, а их высоты, опущенные из вершин M и N , равны. Поскольку медиана делит площадь треугольника пополам, $S_{ACH} = 2S_{AMH}$, $S_{BCH} = 2S_{BHN}$, поэтому $S_{ABC} = 2(120 + 48) = 336$.

Кроме того, периметр треугольника AHM равен $\frac{2S_1}{r_1} = 64$, а периметр треугольника BHN равен $\frac{2S_2}{r_2} = 32$. Заметим, что периметр треугольника ABC равен сумме периметров треугольников AHM и BHN , поэтому радиус вписанной в треугольник ABC окружности есть $r = \frac{336}{32+64} = 7$.

- в) В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH . Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 135, а радиус вписанной в него окружности равен 5. Площадь треугольника BHN равна 945, а радиус вписанной в него окружности равен 8,75. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Ответ: 16.

- г) В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH . Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 243, а радиус вписанной в него окружности равен 6. Площадь треугольника BHN равна 810, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{20}{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Ответ: 13.

- д) В треугольнике ABC с острыми углами при вершинах A и B проведена высота CH . Точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно. Площадь треугольника AHM равна 675, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{45}{4}$. Площадь треугольника BHN равна 165, а радиус вписанной в него окружности равен $\frac{55}{12}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC .

Ответ: 17,5.

9. а) В каждую клетку доски 24×30 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?

Ответ: 360.

Решение. В любом клетчатом квадрате 2×2 должно стоять не более 2 белых шашек (иначе найдется уголок без чёрных шашек). Разобьем доску на 180 квадратов 2×2 . В каждом квадрате стоит не более 2 белых шашек. Значит, всего белых шашек не более $180 \cdot 2 = 360$. Рассмотрим шахматную раскраску доски. Чёрные шашки можно поставить на чёрные клетки, а белые шашки – на белые клетки (их будет ровно 360). Тогда в любом «уголке» из 3 клеток будет черная шашка.

- б) В каждую клетку доски 22×36 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?

Ответ: 396.

- в) В каждую клетку доски 28×40 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?

Ответ: 560.

- г) В каждую клетку доски 30×26 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?

Ответ: 390.

- д') В каждую клетку доски 34×38 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наибольшее количество белых шашек может стоять на доске?

Ответ: 646.

10. а) За круглый стол сели 90 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 60.

Решение. У трёх мудрецов, сидящих подряд, числа на карточках не могут быть одновременно положительными. В противном случае у мудреца, сидящего справа от этих трёх (четвёртого), число на карточке было бы больше. У пятого мудреца число должно было бы быть ещё больше и т.д. А так как мудрецы сидят по кругу, мы бы пришли к противоречию. Таким образом, у любой тройки мудрецов, сидящих подряд, на карточках записано не более двух положительных чисел. Разбив мудрецов на тройки, получаем, что карточек с положительными числами не больше 60.

60 карточек с положительными числами может быть, например, если у мудрецов карточки с числами $2, 2, -2, \dots, 2, 2, -2$.

- б) За круглый стол сели 78 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 52.

- в) За круглый стол сели 66 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 44.

- г) За круглый стол сели 105 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 70.

- д) За круглый стол сели 114 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках трёх ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 76.