11 класс – день 2

1. а) Дана возрастающая геометрическая прогрессия $b_1,\ b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Известно, что $b_2+b_4=10$, $b_4^2-b_2^2=60$. Чему равен пятый член прогрессии?
Ответ: 16.
Решение. Обозначим первый член прогрессии a, а её знаменатель – q. Тогда

$$\begin{cases} aq^3+aq=10, \\ a^2q^6-a^2q^2=60; \end{cases} \qquad \begin{cases} aq^3+aq=10, \\ aq^3-aq=6. \end{cases}$$

Отсюда $aq^3=8,\ aq=2$, и $q=2$. Тогда $a_5=aq^4=16$.

б) Дана убывающая геометрическая прогрессия $b_1,\ b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Известно, что $b_3-b_5=12$, $b_3^2-b_5^2=240$. Чему равен второй член прогрессии?
Ответ: 32.

в) Дана возрастающая геометрическая прогрессия $b_1,\ b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Известно, что $b_2+b_4=30$, $b_4^2-b_2^2=540$. Чему равен шестой член прогрессии?
Ответ: 96.

г) Дана убывающая геометрическая прогрессия $b_1,\ b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Известно, что $b_3-b_5=18$, $b_3^2-b_5^2=540$. Чему равен шестой член прогрессии?
Ответ: 3.

д) Дана возрастающая геометрическая прогрессия $b_1,\ b_2, \ldots, b_n, \ldots$ Известно, что $b_3+b_5=20$, $b_5^2-b_3^2=240$. Чему равен шестой член прогрессии?
Ответ: 32.

2. а) Найдите вероятность, что у случайно выбранного восьмизначного нечётного числа все цифры являются нечётными. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

Ответ: 0,0087.

Решение. Всего восьмизначных чисел 99999999 – 9999999 (из всех чисел до 99999999 включительно вычли все семизначные и меньшие, чем семизначные), из них нечётных ровно половина. Восьмизначных чисел со всеми нечётными цифрами 5^8, поэтому $P = \dfrac{5^8}{0{,}5 \cdot 90000000}$.

б) Найдите вероятность, что у случайно выбранного семизначного чётного числа все цифры являются чётными. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

Ответ: 0,0139.

Решение. Всего семизначных чисел 9999999 – 999999 (из всех чисел до 9999999 включительно вычли все шестизначные и меньшие, чем шестизначные), из них чётных ровно половина. Семизначных чисел со всеми чётными цифрами $4 \cdot 5^6$ (на первом месте не может быть нуля), поэтому $P = \dfrac{4 \cdot 5^6}{0{,}5 \cdot 9000000}$.

в) Найдите вероятность, что у случайно выбранного семизначного нечётного числа все цифры являются нечётными. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

Ответ: 0,0174.

г) Найдите вероятность, что у случайно выбранного восьмизначного чётного числа все цифры являются чётными. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

Ответ: 0,0069.

д) Найдите вероятность, что у случайно выбранного шестизначного чётного числа все цифры являются чётными. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.

Ответ: 0,0278.

3. а) Известно, что при некоторых $x, y \in (0; \pi]$ ровно два из четырёх чисел

$$\sin^2 x, \qquad \sin^2 y, \qquad \sin^2 x + \cos^2 y + 2 - \cos^2 2x, \qquad 2 + \sin^2 2x$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x-y}{\pi}$.

Ответ: 0,5.

Решение. Если эти числа обозначить a, b, c, d, то окажется, что $a-b=c-d$. Это означает, что $a=b \Leftrightarrow c=d$, $a=c \Leftrightarrow b=d$. Значит, имеет смысл рассмотреть только два варианта: $a=d$ и $b=c$. Уравнение $a=d$ не имеет решений. $b=c$ дает

$$\sin^2 y = \sin^2 x + \cos^2 y + 2 - \cos^2 2x,$$

$$0 = \sin^2 x + 2\cos^2 y + \sin^2 2x,$$

откуда $\sin x = 0$, $\cos y = 0$. Следовательно, единственная возможность – это $x = \pi$, $y = \frac{\pi}{2}$. Несложно проверить, что при этом равны между собой ровно два из четырёх чисел.

б) Известно, что при некоторых $x, y \in (0; \pi]$ ровно два из четырёх чисел

$$\cos^2 x, \qquad \cos^2 y, \qquad \cos^2 x + \sin^2 y + 2 - \cos^2 2x, \qquad 2 + \sin^2 2x$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x-y}{\pi}$.

Ответ: $-0{,}5$.

в) Известно, что при некоторых $x, y \in (0; \pi]$ ровно два из четырёх чисел

$$2\sin^2 x, \qquad 3\sin^2 y, \qquad 2\sin^2 x + 3\cos^2 y + 6 - 3\cos^2 2x, \qquad 6 + 3\sin^2 2x$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x+y}{\pi}$.

Ответ: 1,5.

г) Известно, что при некоторых $x, y \in (0; \pi]$ ровно два из четырёх чисел

$$2\cos^2 x, \qquad 3\cos^2 y, \qquad 2\cos^2 x + 3\sin^2 y + 6 - 3\cos^2 2x, \qquad 6 + 3\sin^2 2x$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{2x+y}{\pi}$.

Ответ: 2.

д) Известно, что при некоторых $x, y \in (0; \pi]$ ровно два из четырёх чисел

$$\sin^2 x, \qquad 2\sin^2 y, \qquad \sin^2 x + 2\cos^2 y + 4 - 2\cos^2 2x, \qquad 4 + 2\sin^2 2x$$

равны между собой. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x-2y}{\pi}$.

Ответ: 0.

4. а) Даны 13 натуральных чисел, в записи которых встречается одна-единственная цифра (например, 7, 7, 777, 77,...) Сколько цифр использовано для записи всех 13 чисел, если известно, что сумма этих чисел равна 10 278?

Ответ: 30.

Решение. Все числа оканчиваются одной и той же цифрой k, и их 13 штук. Так как при сложении 13 чисел, оканчивающихся на цифру k, получилось число, оканчивающееся на цифру 8, то $k = 6$. Если среди них нет ни одного четырёхзначного числа, то сумма чисел не превосходит $13 \cdot 666 = 8\,658$. Значит, по крайней мере одно четырёхзначное число есть. Также очевидно, что более одного четырёхзначного числа быть не может (тогда было бы, что $2 \cdot 6\,666 = 13\,332 > 10\,278$). Таким образом, $x_1 = 6\,666$, и тогда сумма оставшихся чисел равна $x_2 + x_3 + \ldots + x_{13} = 3\,612$. Аналогично устанавливаем, что трёхзначных чисел ровно пять: если бы их было шесть или больше, то их сумма была бы по крайней мере $3\,996$, а если бы их было не более четырёх, то сумма 12 чисел была бы не более $4 \cdot 666 + 8 \cdot 66 = 3\,192 < 3\,612$. Итак, $x_2 = \ldots = x_6 = 666$, $x_7 + \ldots + x_{13} = 282$. На этом этапе можно обойтись без оценок: пусть k из семи чисел равны 66, а остальные $(7 - k)$ чисел равны 6 – тогда $66k + 6(7 - k) = 282$, откуда $k = 4$. Итак, данные числа – это 6 666, 666, 666, 666, 666, 666, 66, 66, 66, 66, 6, 6, 6, и для их записи использовано 30 цифр.

б) Даны 13 натуральных чисел, в записи которых встречается одна-единственная цифра (например, 7, 7, 777, 77,...) Сколько цифр использовано для записи всех 13 чисел, если известно, что сумма этих чисел равна 15 224?

Ответ: 31.

в) Даны 13 натуральных чисел, в записи которых встречается одна-единственная цифра (например, 7, 7, 777, 77,...) Сколько цифр использовано для записи всех 13 чисел, если известно, что сумма этих чисел равна 11 709?

Ответ: 33.

г) Даны 13 натуральных чисел, в записи которых встречается одна-единственная цифра (например, 7, 7, 777, 77,...) Сколько цифр использовано для записи всех 13 чисел, если известно, что сумма этих чисел равна 17 127?

Ответ: 31.

д) Даны 13 натуральных чисел, в записи которых встречается одна-единственная цифра (например, 7, 7, 777, 77,...) Сколько цифр использовано для записи всех 13 чисел, если известно, что сумма этих чисел равна 10 732?

Ответ: 28.

5. а) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC, длины всех рёбер которой равны между собой. На рёбрах A_1C_1, B_1B и BC отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $A_1P : A_1C_1 = 2 : 5$, $B_1Q : B_1B = 1 : 4$ и $BR : BC = 3 : 5$. Найдите тангенс угла между плоскостями PQR и ABC.

Ответ: 2,5.

Решение. Пусть длина ребра призмы равна a, M – середина AC, K – точка пересечения прямых QR и C_1C, L – точка пересечения прямых PK и AC. Треугольники QBR и KCR подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{BR}{CR} = \frac{3}{2}$, поэтому $KC = QB/k = \frac{3a}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{a}{2}$. Треугольники KCL и KC_1P подобны с коэффициентом подобия $n = \frac{KC}{KC_1} = \frac{0{,}5a}{0{,}5a+a} = \frac{1}{3}$, отсюда $CL = n \cdot C_1P = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{5} = \frac{a}{5}$. Заметим, что $\frac{CL}{CM} = \frac{1}{5} \cdot 2 = \frac{2}{5} = \frac{CR}{CB}$, поэтому $LR \parallel MB$ и $LR \perp AC$. Поэтому искомый угол равен углу PLA и

$$\operatorname{tg} \angle PLA = \frac{A_1A}{C_1P - CL} = \frac{1}{\frac{3}{5} - \frac{1}{5}} = \frac{5}{2}.$$

б) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC, длины всех рёбер которой равны между собой. На рёбрах A_1C_1, B_1B и BC отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $A_1P : A_1C_1 = 2 : 7$, $B_1Q : B_1B = 3 : 5$ и $BR : BC = 2 : 7$. Найдите тангенс угла между плоскостями PQR и ABC.

Ответ: 2,8.

в) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC, длины всех рёбер которой равны между собой. На рёбрах A_1C_1, B_1B и BC отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $A_1P : A_1C_1 = 1 : 4$, $B_1Q : B_1B = 4 : 5$ и $BR : BC = 1 : 8$. Найдите тангенс угла между плоскостями PQR и ABC.

Ответ: 3,2.

г) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC, длины всех рёбер которой равны между собой. На рёбрах A_1C_1, B_1B и BC отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $A_1P : A_1C_1 = 5 : 12$, $B_1Q : B_1B = 1 : 5$ и $BR : BC = 2 : 3$. Найдите тангенс угла между плоскостями PQR и ABC.

Ответ: 2,4.

д) Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC, длины всех рёбер которой равны между собой. На рёбрах A_1C_1, B_1B и BC отмечены точки P, Q и R соответственно, причём $A_1P : A_1C_1 = 1 : 6$, $B_1Q : B_1B = 3 : 5$ и $BR : BC = 4 : 9$. Найдите тангенс угла между плоскостями PQR и ABC.

Ответ: 1,8.

6. а) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 3x^2 - 2x = m$ и $x^3 + 4x^2 - 9x = k$ имеют два общих корня?

Ответ: 12.

Решение. Вычитая первое уравнение из второго, получаем уравнение $7x^2 - 7x = k - m$, корнями которого являются два общих корня исходных уравнений. Домножаем первое уравнение на 7 и вычитаем из него уравнение $7x^2 - 7x = k - m$, умноженное на x. Получаем уравнение $14x^2 + (14 - k + m)x = -7m$, корнями которого также являются два общих корня исходных уравнений. Значит, левые части уравнений $7x^2 - 7x = k - m$ и $14x^2 + (14 - k + m)x = -7m$ пропорциональны. Отсюда $k = 20$, $m = -8$. Остаётся проверить, что при найденных значениях m и k исходные уравнения имеют два общих корня. Значит, $N = 12$.

б) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 4x^2 - 2x = m$ и $x^3 + x^2 - 7x = k$ имеют два общих корня?

Ответ: -5.

в) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 3x^2 - 7x = m$ и $x^3 + 2x^2 - 2x = k$ имеют два общих корня?

Ответ: -9.

г) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - x^2 - 7x = m$ и $x^3 + 2x^2 - 4x = k$ имеют два общих корня?

Ответ: -5.

д) Для какого наибольшего числа N существуют такие числа m и k, что $N = m + k$, а уравнения $x^3 - 2x^2 - 7x = m$ и $x^3 + 3x^2 - 2x = k$ имеют два общих корня?

Ответ: -4.

7. а) В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, известно, что $AB = 48$, $BC = 60$, $CD = 24$, $AD = 12$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC – в точке F. Найдите квадрат длины отрезка EF.

Ответ: 2 849.

Решение. Из подобия треугольников ADE и CBE следует, что $\frac{BE}{DE} = \frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AD}$. Обозначая $AE = x$, $DE = y$, получаем систему уравнений $\frac{x+48}{y} = \frac{y+24}{x} = \frac{60}{12}$, откуда $x = 7$, $y = 11$. Аналогично находим, что $DF = 44$, $CF = 28$.

Пусть $\angle ABC = \beta$. Тогда $\angle EDF = 180° - \beta$, и записав теорему косинусов для треугольников BEF и DEF, получаем $EF^2 = 55^2+88^2-2\cdot55\cdot88\cdot\cos\beta = 11^2+44^2-2\cdot11\cdot44\cdot\cos(180° - \beta)$. Решив эти уравнения, находим, что $EF^2 = 2\,849$.

б) В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, известно, что $AB = 48$, $BC = 36$, $CD = 12$, $AD = 12$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC – в точке F. Найдите квадрат длины отрезка EF.

Ответ: 847,21.

в) В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, известно, что $AB = 28$, $BC = 35$, $CD = 14$, $AD = 14$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC – в точке F. Найдите квадрат длины отрезка EF.

Ответ: 1 656.

г) В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, известно, что $AB = 240$, $BC = 144$, $CD = 120$, $AD = 48$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC – в точке F. Найдите квадрат длины отрезка EF.

Ответ: 41 545.

д) В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, известно, что $AB = 30$, $BC = 24$, $CD = 15$, $AD = 12$. Прямые AB и CD пересекаются в точке E, а прямые AD и BC – в точке F. Найдите квадрат длины отрезка EF.

Ответ: 1 640.

8. а) В каждую клетку доски 26×25 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?

Ответ: 312.

Решение. В любом клетчатом квадрате 2×2 должно стоять не менее 2 чёрных шашек (иначе найдётся «уголок» без чёрных шашек). Выделим правый (25-й) столбец, а оставшуюся доску разобьём на 156 квадратов 2×2. В каждом квадрате стоит не менее 2 чёрных шашек. Значит, всего есть не менее $156 \cdot 2 = 312$ чёрных шашек.

Поставим чёрные шашки во $2, 4, \ldots, 24$-й столбцы (их ровно 312), а белые шашки – в остальные клетки. Тогда в любом «уголке» из 3 клеток окажется чёрная шашка.

б) В каждую клетку доски 28×37 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?

Ответ: 504.

в) В каждую клетку доски 36×27 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?

Ответ: 468.

г) В каждую клетку доски 40×19 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?

Ответ: 360.

д) В каждую клетку доски 22×35 клеток поставили либо чёрную, либо белую шашку. Оказалось, что в любом «уголке» из 3 клеток стоит хотя бы одна чёрная шашка. Какое наименьшее количество чёрных шашек может стоять на доске?

Ответ: 374.

9. а) За круглый стол сели 95 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 63.

Решение. У трёх мудрецов, сидящих подряд, числа на карточках не могут быть одновременно отрицательными. Значит у любой тройки мудрецов, сидящих подряд, на карточках записано не более двух отрицательных чисел. Выберем какого-нибудь мудреца, на карточке которого написано положительное число. Также возьмем его соседа (на его карточке может быть отрицательное число). Остальных мудрецов разобьем на 31 тройку сидящих подряд. Значит, есть не более чем $1 + 2 \cdot 31 = 63$ карточек с отрицательными числами.

63 карточки с отрицательными числами может быть, например, в следующей ситуации. Занумеруем мудрецов по кругу. Пусть у мудрецов с номерами $1, 4, 7, 10, \ldots, 94$ карточки с числом 5, а у остальных – карточки с числом -2.

б) За круглый стол сели 89 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 59.

в) За круглый стол сели 113 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 75.

г) За круглый стол сели 125 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 83.

д) За круглый стол сели 146 мудрецов. Каждый из них взял карточку и записал на ней целое ненулевое число. Оказалось, что у каждого мудреца число на карточке больше произведения чисел на карточках двух ближайших мудрецов, сидящих справа от него. Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть выписано на карточках мудрецов?

Ответ: 97.

10. а) Коля записывает в тетрадь натуральные числа. Первым он пишет число 4, вторым – число 6. Каждое следующее число он пишет по следующему правилу. Если последними записанными числами были числа a и b (в указанном порядке), то следующим он записывает наименьшее составное число, которое больше, чем $2b-a$. Какое число он запишет 1501-м?
Ответ: 1 128 752.

Решение. Обозначим выписанные Колей числа $x_1 = 4$, $x_2 = 6$. Запишем несколько следующих чисел: $x_3 = 9$, $x_4 = 14 = x_3 + 5$, $x_5 = 20 = x_4 + 6$, $x_6 = 27 = x_5 + 7$. Заметим, что при $n \geqslant 3$ справедливо равенство: $x_n = x_{n-1} + n + 1$. Если оно является верным, то $x_n = x_{n-1}+n+1 = x_{n-2}+n+n+1 = x_{n-3}+n-1+n+n+1 = \ldots = x_3+5+6+\ldots+n+1 = \frac{n(n+3)}{2}$. Докажем это равенство по индукции. При $k = 3$ оно верно. Пусть оно верно при $k \leqslant n$ и покажем, что оно верно при $k = n + 1$. Имеем: x_{n+1} – это число большее, чем $2x_n - x_{n-1}$, т.е. $x_{n+1} \geqslant 2x_n - x_{n-1} + 1 = 2\frac{n(n+3)}{2} - \frac{(n-1)(n+2)}{2} + 1 = \frac{n^2+5n+4}{2} = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$. Это означает, что $x_{n+1} \geqslant \frac{(n+1)(n+4)}{2}$. Но данное число при любом $n \geqslant 3$ составное, так как является произведением двух чисел разной чётности, каждое из которых больше 2. Значит, именно об этом числе и идет речь в условии. Поэтому $x_{1501} = \frac{1501\cdot 1504}{2} = 1\,128\,752$.

б) Коля записывает в тетрадь натуральные числа. Первым он пишет число 6, вторым – число 9. Каждое следующее число он пишет по следующему правилу. Если последними записанными числами были числа a и b (в указанном порядке), то следующим он записывает наименьшее составное число, которое больше, чем $2b-a$. Какое число он запишет 2601-м?
Ответ: 3 389 105.

в) Коля записывает в тетрадь натуральные числа. Первым он пишет число 9, вторым – число 14. Каждое следующее число он пишет по следующему правилу. Если последними записанными числами были числа a и b (в указанном порядке), то следующим он записывает наименьшее составное число, которое больше, чем $2b-a$. Какое число он запишет 3701-м?
Ответ: 6 861 659.

г) Коля записывает в тетрадь натуральные числа. Первым он пишет число 14, вторым – число 20. Каждое следующее число он пишет по следующему правилу. Если последними записанными числами были числа a и b (в указанном порядке), то следующим он записывает наименьшее составное число, которое больше, чем $2b-a$. Какое число он запишет 4801-м?
Ответ: 11 546 414.

д) Коля записывает в тетрадь натуральные числа. Первым он пишет число 27, вторым – число 35. Каждое следующее число он пишет по следующему правилу. Если последними записанными числами были числа a и b (в указанном порядке), то следующим он записывает наименьшее составное число, которое больше, чем $2b-a$. Какое число он запишет 5901-м?
Ответ: 17 449 277.